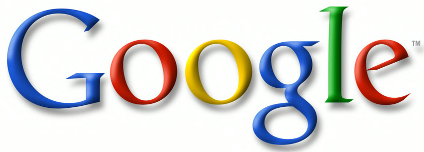
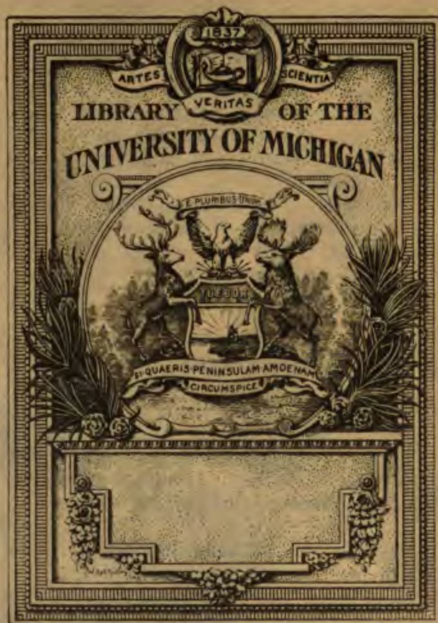

Google

Mathematische Bibliothek

Gemeinverständliche Darstellungen aus der Elementar-Mathematik für Schule und Leben. Unter Mitwirkung von Fachgenossen herausgegeben von



Die Sam … er Folge
herausg … r Mathe-
matik in … er Form
zu ermö … lene hin-
aus zu b … also teils
eine Ve … mentarer
Problem … sonderes
mathema … lein, die
den Les … atischen
Kenntnis … nführen.

1. E. L … lkern in alter …
2. H. W … nen und histo…
3. W. L … Ausblick auf …
4. O. M … dungen. Mit …
5. H. E … 12.
6. M. Z … ie. Mit 18 F…
7. H. W … n. 1912.
8. P. M … n. 1912.
9. A. W … g. 1912.
10. W. Lietzmann u. … 1913.
11. P. Zühlke, Konstruktionen … begrenzter Ebene. Mit Figuren. 1913.

Weiter sind zunächst in Aussicht genommen:

E. Beutel, die Quadratur des Kreises.
M. Gebhardt, zur Geschichte der quadratischen Gleichungen.
W. Lietzmann, der Eulersche Polyedersatz.
R. Rothe, die zeichnerische Behandlung der Geländeflächen.
A. Schreiber, Ortsbestimmung auf dem Lande, zur See und in der Luft.
H. Wieleitner, Elemente d. Mengenlehre.
—— höhere Kurven i. einfacher Darstellung.
M. Winkelmann, der Kreisel.
A. Witting, Funktionsbegriff u. graphische Darstellung.
—— abgekürztes Rechnen.
—— Verschiebung, Drehung, Spiegelung, Verschraubung.
—— Drehmoment und Trägheitsmoment.
—— u. M. Gebhardt, Beispiele zur Geschichte der Mathematik.
P. Zühlke, stereometrische Konstruktionen.

MATHEMATISCHE BIBLIOTHEK
HERAUSGEGEBEN VON W. LIETZMANN UND A. WITTING
11

KONSTRUKTIONEN IN BEGRENZTER EBENE

VON

DR. PAUL ZÜHLKE
DIREKTOR DES REALGYMNASIUMS
ZU LANDESHUT IN SCHLESIEN

MIT 65 FIGUREN IM TEXT



LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1913

VORWORT

Die Punkte, Geraden und Kreise, mit denen die theoretische Geometrie sich beschäftigt, sind rein ideale Gebilde; sobald man ihre Namensvettern auf ebenem Gelände oder auf dem Zeichenblatte benutzt, merkt man etwas von den Übelständen, die Chr. Paulus einmal sehr fein als „die Unvollkommenheiten der Realität“ bezeichnet hat. Eine der peinlichsten Unvollkommenheiten dieser Art ist die Begrenztheit der praktischen Zeichenebene im Gegensatz zu der unendlichen Ausdehnung der theoretischen Ebene. Wie hilft man sich, wenn ein Punkt, den man notwendig braucht, außerhalb des Zeichenblattes fällt, oder wenn gar eine Gerade, die man nicht entbehren kann, draußen liegt? Solche Fragen werden in dem vorliegenden Bändchen behandelt, und zwar den Zielen der „Mathematischen Bibliothek“ entsprechend in möglichst allgemein verständlicher Darstellung und unter dauernder Bezugnahme auf praktische Fälle. — Bei allen Konstruktionen habe ich versucht, den Leser zu einer kritischen Beurteilung der Lösungen anzuregen; an vielen Stellen wird auch auf die Möglichkeit, eigene Konstruktionen zu erfinden und die angegebenen Lösungen zu verbessern oder zu modifizieren, hingewiesen.

Die Arbeit, die in dem vorliegenden Bändchen steckt, habe ich um so lieber geleistet, als meine vor 7 Jahren veröffentlichte Schrift „Ausführung elementargeometrischer Konstruktionen bei ungünstigen Lageverhältnissen“ (Leipzig, B. G. Teubner, 1906) eine freundlichere Beurteilung und weitere Verbreitung gefunden hat, als ich zu hoffen gewagt hatte. Aus jener Schrift ist einiges in das vorliegende Bändchen übergegangen, doch sind etwa 20 Lösungen neu hineingekommen. Einiges wenige dürfte selbst erfahrenen Fachgenossen — für die das Büchlein ja eigentlich nicht bestimmt ist — neu sein, so der Hinweis auf die ältesten hier in Frage kommenden Fachschriften und einige Konstruktionen, die überhaupt noch nicht veröffentlicht worden sind.

Landeshut i. Schl., Ostern 1913.

P. Zühlke.

INHALTSVERZEICHNIS

EINLEITUNG

(Geschichtliches und Grundsätzliches)

Die alten Griechen haben die Geometrie nicht nur mit vielem Scharfsinn zu einem stattlichen Lehrgebäude von geradezu bewunderungswürdiger Geschlossenheit ausgestaltet, sondern sie haben die theoretischen Kenntnisse auch praktisch angewendet; jeder kann sich da aus seiner Schulzeit gewiß einiger Beispiele entsinnen, die in der Weltgeschichte eine besondere Berühmtheit erlangt haben, wie etwa die von Thales auf Tag und Stunde vorhergesagten Sonnenfinsternisse der Jahre 610 und 585 v. Chr. oder die Großtaten des Archimedes bei der Belagerung von Syrakus durch Marcellus im Jahre 212 v. Chr.

Alle diese praktischen Anwendungen der Geometrie waren jedoch fast durchweg *rechnerischer* Natur, die *zeichnende* Geometrie hat sich bei den alten Griechen keiner großen Beliebtheit erfreut; wie der große Archimedes sich damit begnügte, seine Figuren in den Sand zu zeichnen, so haben auch die kleineren Geister auf eine exakte Ausführung der Zeichnungen kein Gewicht gelegt. Es genügte ihnen, zu ermitteln, ob und mit welchen Hilfsmitteln man eine Konstruktion theoretisch bewältigen konnte, dagegen war es ihnen völlig gleichgültig, ob sich die theoretisch erdachten Konstruktionen zeichnerisch überhaupt ausführen ließen. Sie wußten natürlich wie wir, daß die wirklich *gezeichneten* Geraden und Kreise die Forderungen, die man an die *gedachten* Gebilde stellen muß, nur in mehr oder weniger roher Weise erfüllen, es war ihnen z. B. sicherlich geläufig, daß der Schnitt zweier Geraden äußerst unscharf wird, sobald die Geraden einen sehr spitzen Winkel miteinander bilden, und daß die Verbindungslinie zweier Punkte um so ungenauer wird, je näher die Punkte beieinander liegen; der Umstand,

daß ein Zeichenblatt nicht unendlich groß ist wie die theoretische Ebene, hat sie ebensowenig gestört wie die Tatsache, daß man mit jedem Zirkel doch nur Kreise von beschränkter Größe zeichnen kann. — Unzweifelhaft lag diese uns heute sonderbar anmutende Nichtbeachtung praktischer Dinge im Zeitalter der Griechen fast ausschließlich in der Eigenart des Zeichenmaterials begründet. In Marmor verstanden die Griechen sehr fein und genau zu arbeiten, auch die von ihnen geschaffenen Kleinkunstwerke, wie z. B. die zierlich geschnittenen Kameen sind Muster von Genauigkeit. Für mathematische Zeichnungen war natürlich die Verwendung so wertvoller Materialien ganz ausgeschlossen, und das „papierne" Zeitalter war eben noch nicht angebrochen. — Um so erstaunlicher ist es, daß die alten Griechen gleichwohl auf die subtilsten geometrischen Sätze verfallen sind und daß sie in der reinen Abstraktion allmählich zu einer Exaktheit gelangt sind, die noch heutigentags unübertroffen ist.

Diese Bevorzugung der „reinen" Geometrie vor der „angewandten" blieb dann fast zwei Jahrtausende hindurch das Ideal der Mathematiker, und es gehörte im 17. Jahrhundert geradezu Erfindergeist dazu, die Ausführbarkeit geometrischer Konstruktionen zum Gegenstand mathematischer Untersuchungen zu machen [1][1]). Mit besonderem Nachdruck hat dann im 19. Jahrhundert Jacob Steiner darauf hingewiesen, daß man bei der Lösung von Konstruktionsaufgaben sorgfältig unterscheiden müsse, ob die dazu erforderlichen Hilfskonstruktionen „bloß mittels der Zunge" oder auch wirklich auf dem Zeichenbrett mit Lineal, Zirkel und Schiebdreiecken ausgeführt werden sollen. Was theoretisch kurz und einfach ist, braucht praktisch noch nicht empfehlenswert zu sein; z. B. sind die sogenannten geometrographischen Konstruktionen für die wirkliche, praktische Ausführung trotz aller „Einfachheit" nicht immer genau genug, was von den Geometrographen auch zugestanden wird. Die Genauigkeit einer Zeichnung ist nämlich außer von der Anzahl der zu ihrer Herstellung notwendigen Elementarkonstruktionen (deren jede mit einem unvermeidlichen kleinen

[1]) Die in eckigen Klammern stehenden Zahlen verweisen auf die im letzten Kapitel des Bändchens S. 38f. genannten Arbeiten.

Fehler behaftet ist) noch wesentlich abhängig von der mehr oder weniger günstigen, gegenseitigen Lage der in der Figur benutzten Punkte und Geraden.

Wann wird man die Lageverhältnisse einer Figur als *ungünstig* bezeichnen? Einmal dann, wenn Punkte, die zur Konstruktion gebraucht werden, unzugänglich sind, d. h. außerhalb des zur Verfügung stehenden Zeichenblattes liegen; solche Fälle werden in der vorliegenden Schrift bei zahlreichen Aufgaben einzeln behandelt werden. — Es bleiben dann noch die Fälle, in denen einerseits die Schnittpunkte von Geraden (oder Kreisen), andererseits die Verbindungslinien von Punkten zwar erreichbar sind, aber nicht sicher genug bestimmt erscheinen; obgleich derartige Fälle in der vorliegenden Schrift nicht ausführlicher behandelt werden, dürfen wir an ihnen doch nicht ganz vorübergehen, weil uns daran liegt, den geneigten Leser zur Kritik der unten gegebenen Konstruktionen anzuregen, denn der Wert einer noch so schönen Lösung könnte durch eine Unsicherheit ihres Ergebnisses völlig in Frage gestellt werden, und deswegen wird selbst die theoretisch eleganteste Konstruktion dem praktischen Zeichner erst wertvoll sein, wenn sie ihm erlaubt, die Genauigkeit des Ergebnisses zu prüfen.

Der erste, der sorgfältige Untersuchungen über die Genauigkeit geometrischer Konstruktionen angestellt hat, war Chr. Wiener (Darst. Geom. Bd. 1, 1884, S. 190), von dem wir hier drei Sätze anführen, „welche auf Erfahrung, Anschauung und Abschätzung gegründet sind.

1. Eine Gerade ist in ihrem ganzen Verlaufe um so sicherer bestimmt, je weiter die zwei Punkte voneinander entfernt liegen, welche sie bestimmen.

2. Ein als Schnitt zweier Linien bestimmter Punkt dient um so sicherer zur Bestimmung beliebiger Geraden, je mehr sich der Winkel, unter dem sich jene Linien schneiden, einem Rechten nähert.

3. Der Schnittpunkt zweier sich spitzwinklig schneidenden Geraden dient dennoch sicher zur Bestimmung einer dritten Geraden, wenn diese einen kleinen Winkel mit einer der beiden ersteren Geraden bildet, wenn sie z. B. im Inneren des von diesen gebildeten spitzen Winkels, nicht aber, wenn sie nahe bei der Halbierungslinie des stumpfen Winkels liegt.“

Diese **Wienerschen** Sätze werden uns des öfteren einen Maßstab für den Wert der gefundenen Konstruktionen abgeben können.

Wir wenden uns nunmehr zum Hauptteil unserer Arbeit, der Lösung geometrischer Aufgaben in begrenzter Ebene. Es sei aber ausdrücklich hervorgehoben, daß weder bei der Auswahl der Aufgaben, noch bei der Art ihrer Lösung auf Vollständigkeit Gewicht gelegt wurde; z. B. ist es bei Aufgabe 8 absichtlich dem Scharfsinn des Lesers überlassen worden, den Fall, daß die Geraden b, c einen ziemlich kleinen Winkel einschließen, selbst zu erledigen. Die vorliegende Schrift will nicht ein Rezeptbuch zur Lösung aller erdenklichen Aufgaben sein, bei denen sich die Begrenztheit des Zeichenblattes störend bemerkbar macht, sondern sie will nur durch Besprechung der häufiger vorkommenden Typen zur Selbstbetätigung anregen.

I. UNZUGÄNGLICHE SCHNITTPUNKTE VON ZWEI UND MEHR GERADEN

Vorbemerkung. Bei allen Konstruktionen gilt als stillschweigend festgesetzt, daß das Ziehen von Parallelen und das Errichten und Fällen von Loten in der beim praktischen Zeichnen üblichen Weise — also nicht mit Zirkel und Lineal, sondern mit rechtwinkligen Schiebdreiecken — ausgeführt werde.

Stellen wir uns einmal vor, wir hätten (Fig. 1) zwei gerade Linien l_1 und l_2 gezeichnet, deren Schnittpunkt S außerhalb des Zeichenblattes liegt, und wir sollten diesen Schnittpunkt S mit irgendeinem Punkte P des Zeichenblattes durch eine gerade Linie verbinden. – In der Feldmeßkunst würde dieselbe Aufgabe etwa so lauten: Zwei geradlinige Landstraßen l_1, l_2 führen nach einem Orte S. Man soll von einem Orte P aus, der von S wegen eines vorgelagerten Hindernisses (Wald o. dgl.) nicht zu sehen ist, einen geraden Weg nach S abstecken. [Die Aufgabe ist auf dem Felde ebenso gut lösbar wie auf dem Zeichenblatt, mit dem einzigen Unterschied, daß im Freien an die Stelle des Lineals die Visierlinie tritt, die bei gröberen Messungen durch Fluchtstäbe festgelegt werden kann.] Wir werden Punkte und Ge-

raden, die nicht benutzt werden dürfen, im folgenden immer als „unzugänglich" (oder auch als „fern") bezeichnen; unter Anwendung dieser Bezeichnung heißt dann die vorliegende Aufgabe:

1. **Einen gegebenen Punkt P mit dem unzugänglichen Schnittpunkt S zweier gegebenen Geraden l_1, l_2 geradlinig zu verbinden.**

a) (*Lösung nur mit dem Lineal.*) Ich lege (Fig. 1) durch P zwei beliebige Gerade a, b, die l_1, l_2 in A_1, A_2, B_1, B_2 schneiden, ziehe und verlängere die Verbindungslinien A_1B_2 und B_1A_2, bis sie sich in Q schneiden, und lege durch Q eine beliebige Gerade l, die l_1, l_2 in L_1, L_2 schneidet. Der Schnittpunkt R der Verbindungslinien A_1L_2 und L_1B_2 ist ein zweiter Punkt des gesuchten Strahles PS. Den *Beweis* führt man heutzutage meist mittels der harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierecks; die Punktepaare P, Q und R, Q werden durch l_1, l_2 harmonisch getrennt.

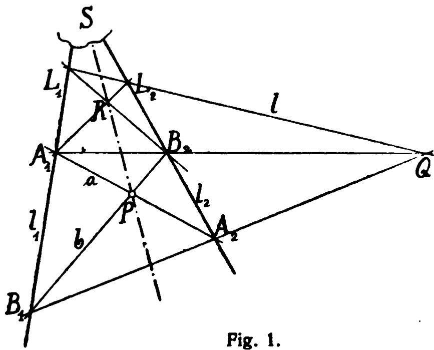


Fig. 1.

Geschichtlich erscheint bemerkenswert, daß J. H. Lambert, der im Jahre 1774 die hier angegebene Lösung veröffentlichte [3], einen ganz anderen, sehr anschaulichen Beweis gegeben hat, der nur die Grundbegriffe der Perspektive als bekannt voraussetzt: Es seien (Fig. 2) l_1, l_2 zwei parallele Geraden; drei beliebige andere Parallelen bestimmen mit l_1, l_2 die Parallelogramme $A_1B_1A_2B_2$ und $A_1B_2L_2L_1$. Jeder Quartaner kann beweisen, daß die Diagonalenschnittpunkte P, R der beiden Parallelogramme auf der Mittellinie des durch l_1, l_2 bestimmten Flächenstreifens liegen, oder was hier das Wichtigste ist, daß die Verbindungslinie RP zu l_1 und l_2 parallel

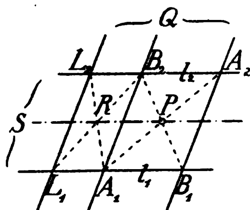


Fig. 2.

läuft. Bildet man die Figur auf eine zum Zeichenblatt geneigte Ebene perspektivisch ab (wobei bekanntlich die Bilder von Geraden, die in Wirklichkeit parallel sind, sich in einem Punkte — ihrem Fluchtpunkte — schneiden), so erhält man unmittelbar die Figur 1. Der Gedankengang ist umkehrbar, da man jedes Viereck als perspektivisches Bild eines Parallelogramms ansehen darf. — Ein dritter, sehr bemerkenswerter Beweis für die Richtigkeit der unter a) angegebenen Konstruktion folgt aus dem Desarguesschen Satze, welcher lautet (vgl. Fig. 3): *Liegen zwei Dreiecke* ($A_1 B_1 C_1$ und $A_2 B_2 C_2$) *in einer Ebene so, daß die Verbindungslinien entsprechender Ecken* ($A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$) *durch einen Punkt* (S) *gehen, so liegen die Schnittpunkte entsprechender Dreiecksseiten* (1. $B_1 C_1$ und $B_2 C_2$ [d. i. der Punkt $\mathfrak{A}$], 2. $A_1 C_1$ und $A_2 C_2$ [d. i. der Punkt $\mathfrak{B}$], 3. $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ [d. i. der Punkt $\mathfrak{C}$]) *auf einer Geraden und umgekehrt.* Auf einen Beweis dieses schönen Satzes brauchen wir hier um so weniger einzugehen, als er in der kleinen Schrift von M. Zacharias: Einführung in die projektive Geometrie (6. Bändchen dieser Sammlung) genauer behandelt wird. Die beiden „perspektiv gelegenen" Dreiecke, um die es sich in Fig. 1 handelt, heißen (man beachte die Reihenfolge der Eckpunkte!) $L_1 B_2 B_1$ und $L_2 A_1 A_2$. Die Verbindungslinien der drei Paare entsprechender Ecken $L_1 L_2$, $A_1 B_2$, $B_1 A_2$ gehen durch einen Punkt Q, also liegen die Schnittpunkte der drei Paare entsprechender Seiten 1. $A_1 A_2$ und $B_2 B_1$ [d. i. der Punkt P], 2. $L_1 B_2$ und $L_2 A_1$ [d. i. der Punkt R], 3. $L_1 B_1$ und $L_2 A_2$ [d. i. der Punkt S] in einer Geraden, wie verlangt war. — *Anmerkung.* Die unter a) angegebene Konstruktion wird im allgemeinen unbrauchbar, wenn P nahe an der Halbierungslinie des von l_1, l_2 eingeschlossenen Winkels liegt. Warum? — Der Leser führe, möglichst ohne die Figur 1 anzusehen, dieselbe Konstruktion aus für den Fall, daß P außerhalb des spitzen Winkels (l_1, l_2) liegt.

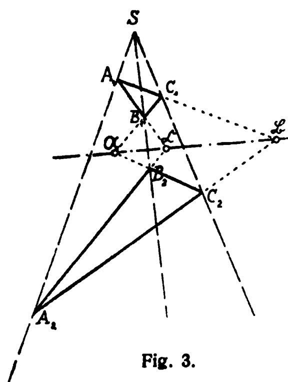


Fig. 3.

b) Ich ziehe (Fig. 4) durch P eine beliebige, von l_1, l_2

begrenzte Gerade $X_1 X_2$ und dazu eine beliebige Parallele $Q_1 Q_2$, trage die Strecke $Q_1 Q_2$ auf $X_1 Q_1$ ab bis U, ziehe zu $X_2 U$ durch P die Parallele PV und mache endlich $Q_1 Q = X_1 V$, so ist PQ die gesuchte Gerade. (*Beweis* mit Hilfe der Proportionallehrsätze.)

c) Ich ziehe (Fig. 5) von P aus bis l_1, l_2 zwei beliebige Gerade PN_1, PN_2 und zur Verbindungslinie von N_1, N_2 eine beliebige Parallele, die l_1, l_2 in E_1, E_2 schneidet.

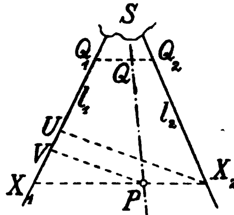


Fig. 4.

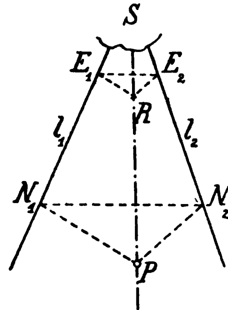


Fig. 5.

Ziehe ich noch durch E_1 zu PN_1 und durch E_2 zu PN_2 je eine Parallele, so schneiden sich diese in einem Punkte R des Strahles PS. (*Beweis*: S ist der äußere Ähnlichkeitspunkt der perspektivisch gelegenen Dreiecke PN_1N_2, RE_1E_2.)

d) Auf l_1, l_2 (Fig. 6) wähle ich je einen Punkt U_1, U_2 beliebig, ziehe in dem Dreieck U_1PU_2 zu der Seite $U_1\ U_2$ eine beliebige Parallele $V_1\ V_2$ und durch V_1 zu l_1, durch V_2 zu l_2 je eine parallele Gerade. Der Schnittpunkt W dieser beiden Geraden liegt auf der gesuchten Verbindungslinie PS. (P ist der innere Ähnlichkeitspunkt der Dreiecke SU_1U_2, WV_1V_2.) Was ist über die praktische Verwendbarkeit dieser Konstruktion zu sagen? Man beachte die oben (S. 3) genannten Wienerschen Sätze.

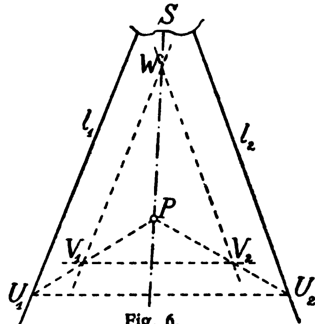


Fig. 6.

e) Die Figur 5 kann man als einen Spezialfall der Desarguesschen Konfiguration ansehen, denn die Paare entsprechender Seiten der Dreiecke PN_1N_2 und RE_1E_2 schneiden sich auf der unendlich fernen Geraden der Zeichenebene; auch der *allgemeine* Fall des Desarguesschen Satzes kann zur Lösung der Aufgabe 1 benutzt werden (so z. B. bei Giacomini [7]): Man ziehe

durch P (Fig. 7) zwei beliebige Geraden, die l_1, l_2 in A_1, A_2 schneiden, auf der Verbindungslinie $A_1 A_2$ wähle man einen Punkt Q beliebig und ziehe durch diesen eine beliebige Gerade g, die PA_1, PA_2 in G_1, G_2 schneidet, und eine andere beliebige Gerade h, die l_1, l_2 in H_1, H_2 schneidet. $H_1 G_1$ und $H_2 G_2$ bestimmen einen Punkt R der Geraden PS. — Wie wird man die Geraden g und h praktisch wählen? (Achte darauf, wie R in der Fig. 7 seine Lage ändert, wenn sich g um Q im Uhrzeigersinn dreht! In welchem Sinne muß sich h um Q drehen, damit die gesuchte Gerade PR möglichst genau wird? Achte auf den ersten der oben genannten Wienerschen Sätze!) Die Konstruktion wird *nicht* wie die unter a) genannte unbrauchbar, wenn P nahe an der Halbierungslinie des von l_1, l_2 gebildeten Winkels liegt. Warum?

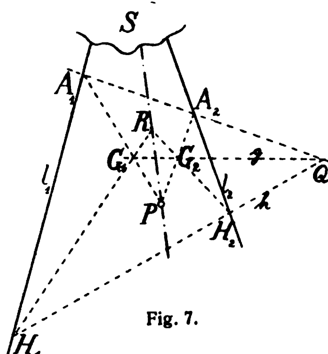


Fig. 7.

f) Da der praktische Zeichner drei beliebige parallele Geraden viel genauer zeichnen kann als drei Geraden, die durch einen im Endlichen gelegenen Punkt gehen, so wird man der vorigen Konstruktion eine andere vorziehen, die als Spezialisierung der Desarguesschen Konfiguration erscheint, wobei der in Fig. 7 benutzte Punkt Q ins Unendliche rückt (so bei Witting [10]). Die Ausführung der Konstruktion auf Grund der Figur 8 kann dem Leser überlassen bleiben; er versuche aber, die Geraden g und h so zu wählen, daß PR möglichst genau wird.

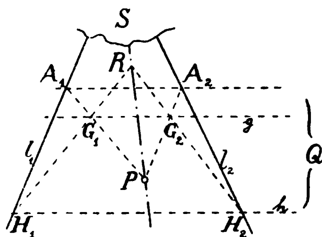


Fig. 8.

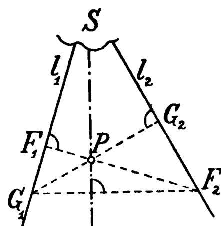


Fig. 9.

g) Man fälle (Fig. 9) von P auf l_1, l_2 die Lote PF_1, PG_2; der Schnitt von PF_1 mit l_2 sei F_2, der von PG_2 mit l_1 sei G_1. Fällt man von P auf die Verbindungslinie von G_1, F_2 das Lot, so geht dieses durch S. (*Beweis:* F_1F_2, G_1G_2 sind Höhen des Dreiecks SG_1F_2.) — *Anmerkung.* Diese Konstruktion wird m. W. zum ersten Male im Jahre 1883 von W. Fiedler (Darst. Geom. Bd. 1, S. 311) erwähnt, sie ist aber wohl zweifellos viel älter. — Schüssler bemerkt sehr treffend: „Diese Konstruktion empfiehlt sich besonders, weil sie die wenigsten Hilfslinien erfordert und alle Schnitte günstig (nahezu rechtwinklig) sind.“ Gleichwohl wird natürlich auch diese Konstruktion, wie jede andere in gewissen Fällen ungenau. Wann?

Zwei andere interessante Lösungen der vorliegenden Aufgabe ergeben sich aus Sonderfällen des Pascalschen und Brianchonschen Satzes für Kegelschnitte. (Vgl. hierzu z. B. Zacharias a. a. O. S. 27 und 39.) Diese Sätze lauten: 1. *Die Schnittpunkte der drei Paar Gegenseiten jedes einem Kegelschnitt eingeschriebenen Sechsecks liegen in einer Geraden* (Pascal). 2. *Die Verbindungslinien der drei Paar Gegenecken jedes einem Kegelschnitte umgeschriebenen Sechsseits gehen durch einen Punkt* (Brianchon). Für uns ist besonders wichtig, daß diese Sätze auch noch gelten, wenn der Kegelschnitt in ein *Geradenpaar* oder aber in ein *Punktepaar entartet.* Man muß sich allerdings dabei von dem aus der Elementargeometrie gewohnten Begriff des Sechsecks als eines von sechs geradlinigen Strecken umschlossenen Flächenstückes losmachen, vielmehr unter „Sechseck“ ein Gebilde verstehen, das man erhält, wenn man sechs Punkte der Zeichenebene 1, 2, 3, 4, 5, 6 in der soeben hingeschriebenen Reihenfolge verbindet, so daß also die Seiten des Sechsecks heißen: 12, 23, 34, 45, 56, 61; dabei werden z. B. 12 und 45 als „gegenüberliegende Seiten“ oder kurz als „Gegenseiten“ bezeichnet, ohne Rücksicht darauf, ob der Augenschein diese Bezeichnung rechtfertigt (Fig. 10) oder nicht (Fig. 11). Entsprechend würde man als „Sechsseit“ ein Gebilde bezeichnen, das man erhält, wenn man sechs gerade Linien in bestimmter Reihenfolge miteinander schneidet. Hält man sich an diese erweiterten Begriffe des Sechsecks und Sechsseits, so erhalten die Sätze von Pascal und

Brianchon folgendes Aussehen [10]: 1. Liegen (Fig. 12) die Punkte 1, 3, 5 auf einer Geraden, 2, 4, 6 auf einer anderen Geraden, so schneiden sich die gegenüberliegenden Seiten des Sechsecks 12 und 45, 23 und 56, 34 und 61 in drei Punkten einer dritten Geraden. 2. Gehen ferner (Fig. 13) die Geraden 1, 3, 5 durch einen Punkt, 2, 4, 6 durch einen anderen Punkt, so schneiden sich die Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken 12 und 45, 23 und 56, 34 und 61 in einem dritten Punkte.

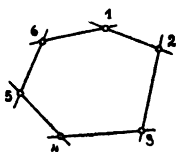


Fig. 10.

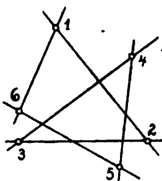


Fig. 11.

Der Leser wird nun schon gemerkt haben, wie man diese Sätze zur Lösung der vorliegenden Aufgabe benutzen kann:

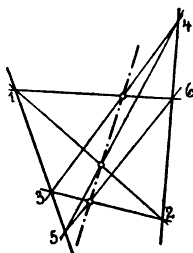


Fig. 12.

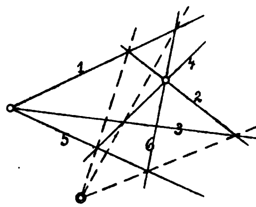


Fig. 13.

h) Man betrachte in einem entarteten Kegelschnitt PS als Pascalsche Gerade und bestimme von dieser einen dritten Punkt Q; man wähle also etwa l_1 als die Sechsecksseite 12, l_2 als 45, P als Schnitt von 16 und 34. Läßt man noch 3 und 6 ins Unendliche rücken, so hat man zu ziehen (Fig. 14): in beliebiger Richtung $\overline{P\,1} \parallel \overline{24}$, sodann $\overline{P\,4} \parallel \overline{15} \parallel \overline{2\,Q}$ und endlich $\overline{5\,Q} \parallel \overline{P\,1}$.

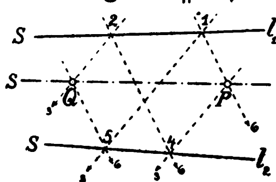


Fig. 14.

i) Als Brianchonschen Punkt wähle man den unzugänglichen Punkt S. Da es bequemer ist, drei Parallelen abzuschieben, als drei Geraden durch einen Punkt zu ziehen, so verlegen wir den Schnittpunkt M der drei Geraden 1, 3, 5 ins Unendliche, ziehen also (Fig. 15) 1 durch P und $1 \parallel 3 \parallel 5$. $2 \equiv C_1 B_2$ und $6 \equiv PA_2$ ergeben den Schnittpunkt N der anderen drei Geraden; $NA_1 \equiv 4$ schneidet 3 im gesuchten Punkte Q von PS.

Bemerkung zu den Lösungen h) und i). Die Figur 14 kann

auch als Brianchonsche Konfiguration angesehen werden. Bezeichnet man nämlich von den sechs Parallelen der Figur 14 die in der einen Richtung verlaufenden mit 1, 3, 5,

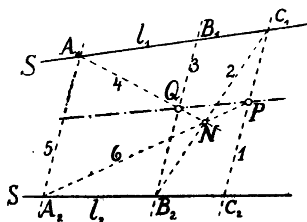


Fig. 15.

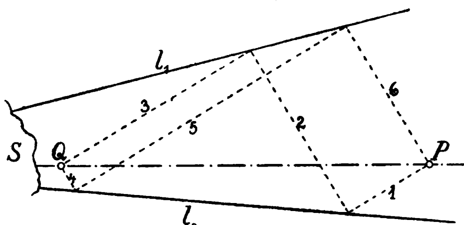


Fig. 16.

die anderen mit 2, 4, 6 (vgl. Fig. 16), so besagt der Brianchonsche Satz, daß die Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken, nämlich 12 und 45 (d. i. die Gerade l_2), 23 und 56 (d. i. l_1), 34 und 61 (d. i. PQ) sich in einem Punkte schneiden, mit anderen Worten: daß PQ durch S geht. — Um das Schiebdreieck nur in einer Richtung verschieben zu müssen, kann man 1 und 6 recht praktisch senkrecht aufeinander wählen (Redl). Das hat überdies den Vorzug, daß Q durch einen hervorragend guten, nämlich rechtwinkligen Schnitt bestimmt wird. Warum kann man die Fig. 15 nicht ohne weiteres als Pascalsche Konfiguration ansehen? Wie müßte man die Konstruktion i) umändern, damit eine solche Auslegung möglich wäre?

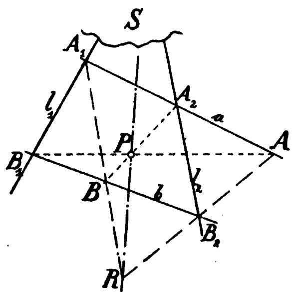


Fig. 17.

k) Läßt man nur das Lineal, nicht aber das Schiebdreieck als Zeicheninstrument zu, so kann die unter h) angegebene Konstruktion (die ziemlich kompliziert wird, wenn 3 und 6 im Endlichen liegen) noch sehr erheblich vereinfacht werden. — Man ziehe (Fig. 17) zwei beliebige Geraden a, b, welche l_1, l_2 in A_1, A_2, B_1, B_2 schneiden. Den gegebenen Punkt P verbinde man mit B_1 und A_2; der Schnitt von PB_1 und a sei A, der von PA_2 und b sei B. Zieht man noch die Geraden A_1B und AB_2, so bestimmen diese einen Punkt R

der gesuchten Verbindungslinie PS. — *Beweis*: Das Geradenpaar a, b kann als entarteter Kegelschnitt aufgefaßt werden, welchem das (überschlagene) Sechseck $B_1 A B_2 A_2 B A_1$ eingeschrieben ist. Die drei Paare gegenüberliegender Seiten sind 1. $B_1 A$, $A_2 B$, 2. AB_2, BA_1, 3. $B_2 A_2$, $B_1 A_1$. Ihre Schnittpunkte P, R, S liegen also auf einer Geraden. — Diese durch theoretische Eleganz und praktische Brauchbarkeit gleich ausgezeichnete Modifikation der Pascalschen Konfiguration wurde von d'Ocagne im Jahre 1886 veröffentlicht.

Schlußbemerkungen zur Aufgabe 1. Mit den hier angegebenen zehn Konstruktionen sind durchaus nicht alle Lösungen erschöpft, die in der Fachliteratur bekannt sind. (Man findet z. B. noch mehrere andere in einer früheren Schrift des Verfassers [11].) Die hier in aller Breite angegebenen Konstruktionen sollen hauptsächlich dem Leser zeigen, wie verschiedenartig man eine solche Aufgabe angreifen kann. Der Leser wird weiter unten bei den etwas kürzer behandelten Aufgaben Gelegenheit finden, selbst neue Lösungen zu erdenken; einstweilen wird er gebeten, von den bisher mitgeteilten Lösungen wenigstens einige bei möglichst verschiedenartigen Lagen der gegebenen Stücke wirklich auf dem Zeichenbrett zu erproben und sich dabei Rechenschaft zu geben über die Brauchbarkeit und Genauigkeit der verschiedenen Konstruktionen.

2. Es sind zwei Punkte A, B und eine Gerade g gegeben. Den Punkt, in welchem g die Gerade AB schneidet, zu ermitteln, ohne A und B zu verbinden (Lösung nur mit dem Lineal).

Die Aufgabe hat in der vorliegenden Fassung für das praktische *Zeichnen* keine Bedeutung, um so mehr dagegen für die *Feldmeßkunst*. Hubert Müller formuliert die Aufgabe so: Auf dem Felde sind zwei Punkte A und B durch Visierstäbe bezeichnet. Obgleich man eines Hindernisses wegen nicht längs der Linie AB visieren kann, so soll dennoch mit alleiniger Hilfe von Visierstäben der Schnittpunkt der Geraden AB mit einer anderen ausgesteckten Geraden g bestimmt werden.

a) Ich wähle (Fig. 18) A, B als ein Paar, zwei Punkte M, N auf g als ein anderes Paar Gegenecken eines vollstän-

digen Vierseits. Auf der dritten Diagonale *CD* wähle ich einen Punkt *Q* beliebig. Der Schnitt von *BM* und *AQ* sei *U*, der von *AN* und *BQ* sei *V*. Die Verbindungslinie *UV* schneidet *g* in dem gesuchten Punkte. Der *Beweis* folgt aus den harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierseits. Wie wird man die Punkte *M*, *N*, *Q* praktisch wählen? — *Anmerkung*. Die hier angegebene Lösung ist zur Lösung a) der Aufgabe 1 „dual" oder „reziprok", d. h. sowohl die

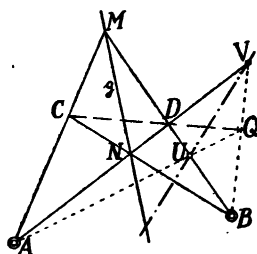


Fig. 18.

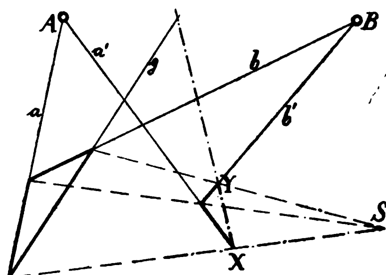


Fig. 19.

Aufgaben als auch die Lösungen gehen ineinander über, wenn man den Begriff

„Gerade" ersetzt durch „Punkt" } und um-
„verbinden" „ „ „zum Schnitte bringen" } gekehrt,

also z. B.

„Verbindungslinie" ersetzt durch „Schnittpunkt"
„gehen durch einen Punkt" „ „ „liegen auf einer Geraden" usw.

b) Ich betrachte *A*, *B* und den gesuchten Punkt als die drei Punkte einer Desarguesschen Geraden und lege (Fig. 19) durch *A* zwei beliebige Geraden *a*, *a'*, durch *B* zwei beliebige Geraden *b*, *b'*. Den Schnittpunkt von *a* und *b* verbinde ich mit dem von *a'* und *b'*; auf der Verbindungslinie wähle ich einen Punkt *S* beliebig und verbinde ihn erstens mit dem Schnittpunkte von *a* und *g*, zweitens mit dem Schnittpunkt von *b* und *g*. Die erste Verbindungslinie bestimmt auf *a'* einen Punkt *X*, die zweite auf *b'* einen Punkt *Y*. Die Verbindungslinie *XY* bestimmt auf *g* den gesuchten Punkt von *AB*. — *Beweis*. *S* ist Perspektivitätszentrum der beiden perspektiv gelegenen Dreiecke, die in

der Figur durch starke Linien hervorgehoben sind; entsprechende Seiten der Dreiecke schneiden sich also nach dem Desarguesschen Satze auf einer Geraden (hier AB). — Man beachte die duale Beziehung zwischen der hier ausgeführten Konstruktion und der Lösung e) der Aufgabe 1.

c) Auf eine geometrographische Lösung der vorliegenden Aufgabe ist vom Verfasser in den Math.-Naturw. Blättern III. Jahrg., 1906, S. 101 aufmerksam gemacht worden; sie steht zu der Lösung k) der Aufgabe 1 in dualer Beziehung, der Leser kann sie also wohl selbst ausführen.

Wir sagten vorhin, die Aufgabe 2 habe „in der vorliegenden Fassung" für das praktische Zeichnen keine Bedeutung; sie gewinnt eine solche aber in dem Augenblicke, wo man sich klarmacht, daß die Punkte A und B auch außerhalb des Zeichenblattes liegen dürfen, wenn sie nur im übrigen bestimmt sind (so Giacomini [7]). Ist also z. B. (Fig. 19) der Schnittpunkt A zweier gegebenen Geraden a, a' ebenso wie der Schnittpunkt B zweier Geraden b, b' unzugänglich, so kann man doch den Punkt, den eine beliebige Gerade g mit der fernen Geraden AB gemein hat, durch eine zweite Gerade (hier XY) genauer bestimmen. Wir haben also damit, ohne daß sich an der Konstruktion das geringste ändert, eine neue Aufgabe gelöst, die in Worte zu fassen, dem Leser überlassen bleibe.

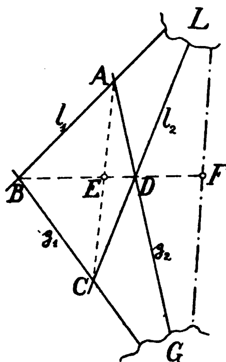


Fig. 20.

3. **Die unzugänglichen Schnittpunkte G, L zweier Geradenpaare g_1, g_2, l_1, l_2 geradlinig zu verbinden.**

Die Aufgabe soll hier nur unter der Annahme gelöst werden, daß wenigstens eine der durch g_1, g_2, l_1, l_2 bestimmten Diagonalen (z. B. BD in Fig. 20 oder AC in Fig. 21) gezeichnet werden kann.

1. Fall. Die zweite Diagonale (AC) ist auch benutzbar.

a) *Lösung nur mit dem Lineal.* Der Schnittpunkt von AC und BD sei E (Fig. 20). Man bestimme zu B, E, D den vierten harmonischen, zu E zugeordneten Punkt F und verbinde diesen (nach Aufg. 1 a) mit G oder L. Die erhaltene Gerade ist die dritte Diagonale des vollständigen Vierseits $g_1 g_2 l_1 l_2$.

b) *Lösung mit Lineal und Schiebdreieck* (nach Redl [9]). Man zeichne (Fig. 21) von A aus die Gerade $1 \parallel l_2$ bis zum Punkte N' auf g_1, von hier aus die Gerade $2 \parallel l_1$, ferner von C aus die Gerade $4 \parallel l_1$ bis N auf g_2, von hier aus die Gerade $3 \parallel l_2$. Die Geraden 2 und 3 bestimmen einen Punkt L' der gesuchten Verbindungslinie LG, auf entsprechende Weise findet man mittelst vier anderer Parallelen den Punkt G' von LG. Den *Beweis* führt man durch zweimalige Anwendung des Brianchonschen Satzes auf zwei entartete Kegelschnitte. Bezeichnet man l_2 mit 5 und l_1 mit 6, so bestimmen die Geraden 1, 2, 3, 4, 5, 6 ein Sechsseit, in welchem einerseits 1, 3, 5, andererseits 2, 4, 6 durch je einen (unendlich fernen) Punkt gehen, also schneiden sich die Verbindungslinien: 1. 12—45 (d. i. g_1), 2. 23—56 (d. i. LL'), 3. 34—61 (d. i. g_2) in einem Punkte, oder LL' geht durch G. Die Fortsetzung des Beweises kann dem Leser überlassen bleiben (vgl. Aufg. 1.g) am Schlusse).

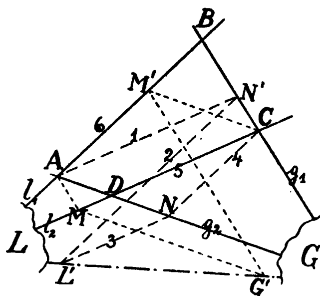


Fig. 21.

2. Fall. Die zweite Diagonale ist nicht benutzbar.

c) Um den Punkt S (Fig. 22) zu ermitteln, in welchem die gesuchte Gerade GL die Diagonale BD schneidet, ziehe man durch einen auf BD beliebig gewählten Punkt U die Geraden $l' \parallel l_2$ und $g' \parallel g_2$; der Schnitt von g', g_1 sei V, der von l', l_1 sei W. Die Gerade VW ist der gesuchten Verbindungslinie parallel und bestimmt auf BD einen Abschnitt BX, mit Hilfe dessen man die Strecke BS aus der Proportion

$$BS : BX = BD : BU$$

ermitteln kann. Im wesentlichen stimmt hiermit die Lösung von Chr. Paulus [8] überein, nur daß man zu jener Zeit die Konstruktion von Parallelen mittelst des Schiebdreieckes nicht recht kannte:

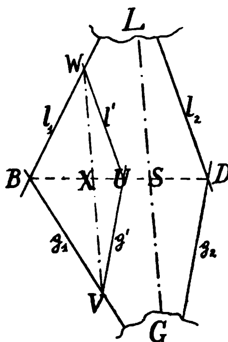


Fig. 22.

dadurch erscheint die Paulussche „Methode der konzentrischen Kreise“ heute etwas schwerfällig. — *Anmerkung.* Wenn es die Lageverhältnisse der Figur gestatten, wird man als den Punkt U die Mitte von BD wählen (so z. B. in Fig. 22); man braucht dann bloß BX um sich selbst zu verlängern, um S zu erhalten. Wo wird die Konstruktion möglicherweise ungenau? Ist VW (und damit die Richtung von LG) sicher genug bestimmt, auch wenn l_1, l_2 und g_1, g_2 sehr spitze Winkel bilden? (Nr. 3 der auf S. 3 genannten Wienerschen Sätze.)

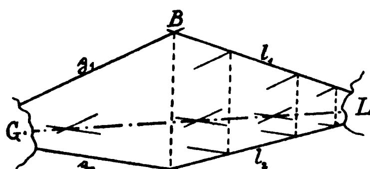


Fig. 23.

d) Man wähle L als äußeren Ähnlichkeitspunkt für eine Reihe perspektivisch gelegener Dreiecke, die dem Dreieck BGD (Fig. 23) ähnlich sind. Theoretisch genügt es natürlich, zu BD zwei Parallele zu ziehen, diese mit l_1, l_2 zum Schnitt zu bringen und durch die erhaltenen Schnittpunkte Parallele zu g_1 bzw. g_2 zu legen; bei der praktischen Ausführung aber wird man sich die in Fig. 23 angedeutete Genauigkeitsprobe nicht entgehen lassen.

e) Ist die soeben angegebene Konstruktion nicht ausführbar, weil selbst recht günstig gelegene Geraden, wie g_3, g_4 (Fig. 24) sich nicht mehr auf der Zeichenfläche schneiden, so kann man durch die Schnittpunkte, welche g_3, g_4 auf der parallel zu BD gezogenen Geraden q bestimmen, neue Geraden $l_3 \parallel l_1$ und $l_4 \parallel l_2$ legen. l_3 und l_4 bestimmen auf BD (oder einer Parallelen dazu) zwei Punkte, von denen aus man $g_5 \parallel g_1$ und $g_6 \parallel g_2$ zieht. Wenn es nötig ist, wird das Verfahren noch fortgesetzt.

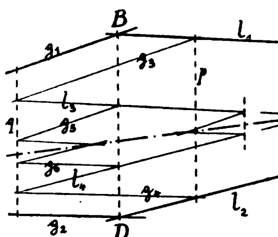


Fig. 24.

Eine durch die Natur der Aufgabe bedingte Ungenauigkeit der angegebenen Konstruktionen liegt darin, daß die Diagonale BD — weil durch zwei „stumpfe“ Schnitte erzeugt — etwas unsicher ausfällt; sonst aber sind die Lö-

sungen d) und e) im allgemeinen recht brauchbar. Daß z. B. l_3, l_4 oder g_5, g_6 usw. sich unter sehr kleinen Winkeln schneiden, beeinflußt die Genauigkeit nicht (vgl. wieder den 3. der Wienerschen Sätze); die übrigen Schnitte sind „gut". — Was ändert sich an diesen Aussagen, wenn g_1, g_2, l_1, l_2 die im 1. Falle angedeutete Lage haben?

f) (Nach Giacomini [7].) Auf der Diagonale BD (Fig. 25) wähle man einen beliebigen Punkt P und lege durch diesen zwei beliebige Geraden k und k'; die erste schneide g_1, g_2, l_1, l_2 in G_1, G_2, L_1, L_2, die zweite in G_1', G_2', L_1' L_2'. Die Geradenpaare L_1G_1', L_2G_2' und $L_1'G_1$, $L_2'G_2$ bestimmen zwei Punkte Q und R der gesuchten Verbindungslinie LG. — *Beweis:* Die gesuchte Verbindungslinie ist die Desarguessche Gerade für die beiden Dreieckspaare BL_1G_1', DL_2G_2' und $BL_1'G_1$, $DL_2'G_2$. — Wie wird man P, k und k' wählen, damit die Konstruktion möglichst *genau* wird?

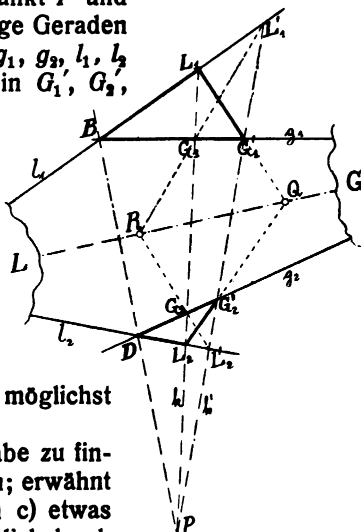


Fig. 25.

Andere Lösungen der Aufgabe zu finden, wird dem Leser überlassen; erwähnt sei z. B., daß die Konstruktion c) etwas modifiziert werden kann. Ist nämlich durch VW die Richtung von GL bestimmt, so kann man zu VW eine beliebige Senkrechte ziehen und damit die gestellte Aufgabe durch eine andere (siehe Nr. 8) ersetzen. Durch diese Modifikation erreicht man, wenn die Winkel (l_1, l_2) und (g_1, g_2) nicht gar zu klein sind, eine größere Genauigkeit als durch die Bestimmung von BS aus der unter c) genannten Proportion.

4. **Durch den unzugänglichen Schnittpunkt zweier Geraden die Parallele zu einer dritten zu legen.**

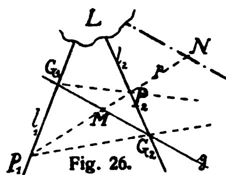


Fig. 26.

a) (Man bemerke die Analogie mit Aufg. 3. a.) Die Gerade g (oder eine beliebige Parallele zu ihr) schneide l_1, l_2 in

G_1, G_2 (Fig. 26). Eine durch die Mitte M von G_1, G_2 gelegte Gerade p schneide l_1, l_2 in P_1, P_2. Man bestimme zu P_1, M, P_2 den vierten harmonischen, zu M zugeordneten Punkt N und lege durch ihn die Parallele zu g. – Theoretisch einfacher wäre es, durch G_1P_2 und P_1G_2 (in der Figur angedeutet) einen anderen, von M durch l_1, l_2 harmonisch getrennten Punkt von LN zu ermitteln. Doch wird wohl selten der Schnitt von G_1P_2, P_1G_2 noch erreichbar oder brauchbar sein. Überhaupt hat die ganze Konstruktion praktisch nur

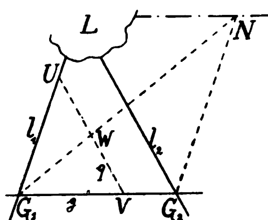


Fig. 27.

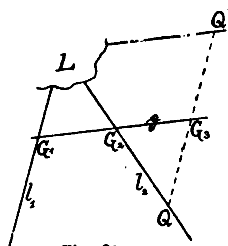


Fig. 28.

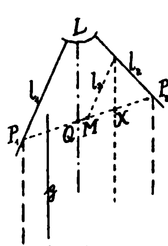


Fig. 29.

wenig Wert; sie versagt völlig, wenn g mit einer der Geraden l_1, l_2 einen sehr spitzen Winkel einschließt oder nahezu die Richtung der Halbierungslinie des (spitzen) Winkels (l_1, l_2) hat. Dasselbe gilt von der folgenden Lösung:

b) Eine Gerade $q \parallel l_2$ bestimme (Fig. 27) auf l_1, g die Punkte U, V. Verbindet man die Mitte W von U, V mit G_1 und zieht durch G_2 zu l_1 die Parallele, so schneidet diese G_1W in der vierten Ecke N eines Parallelogramms, von dem drei Ecken L, G_1, G_2 durch die Daten der Aufgabe bekannt sind.

c) Man verlängere (Fig. 28) das auf g (oder einer Parallelen) durch l_1, l_2 abgeschnittene Stück G_1G_2 um sich selbst bis G_3, ziehe durch G_3 die Parallele zu l_1 und trage das zwischen g, l_2 gelegene Stück QG_3 noch einmal bis Q' auf. Die durch Q' parallel zu g gezogene Gerade geht durch L.

d) Man schneide (Fig. 29) l_1, l_2 durch eine beliebige Gerade in den Punkten P_1, P_2, halbiere P_1P_2 in M, ziehe durch M die Gerade $l_3 \parallel l_1$; die durch den Schnitt von l_2, l_3 zu g gelegte Parallele bestimme auf P_1P_2 den Punkt X. Der durch Verdoppelung von P_2X erhaltene Punkt Q liegt auf

der gesuchten Geraden. — Schneiden sich l_2, l_3 nicht mehr auf der Zeichenfläche, so ist bei allgemeiner Lage des Punktes M der Abschnitt P_2X aus der Proportion

$$P_2Q : P_2P_1 = P_2X : P_2M$$

zu bestimmen. — Es dürfte lehrreich sein, diese Lösung zu vergleichen mit der von Paulus [8] angegebenen Konstruktion: Um einen beliebigen Punkt P der Geraden l_1 (Fig. 30) werden zwei konzentrische Kreise geschlagen, von denen der größere die Gerade l_2 in A und B schneidet. Die Strahlen PA und PB bestimmen auf dem kleinen Kreise die Punkte A' und B'; deren Verbindungslinie l_2' schneidet l_1 in L'. Durch L' wird parallel zu g die Gerade g' gezogen, die den kleinen Kreis in C' und D' schneidet. PC' und PD' bestimmen auf dem großen Kreise die Punkte C und D, deren Verbindungslinie die gesuchte Gerade ist. (*Beweis:* Kreise sind ähnliche Figuren, also auch die Systeme $ABCDL$ und $A'B'C'D'L'$ perspektiv ähnlich in bezug auf P als Zentrum.) — Trotz beträchtlicher Unterschiede in der äußeren Fassung stimmen doch die beiden hier unter d) zusammengefaßten Konstruktionen in ihrem innersten Wesen überein, wovon sich der Leser selbst überzeugen möge.

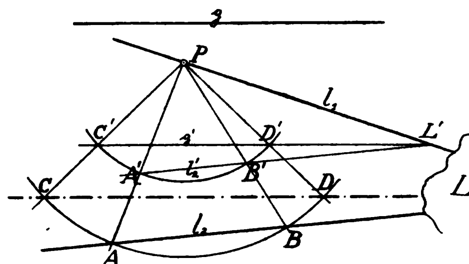


Fig. 30.

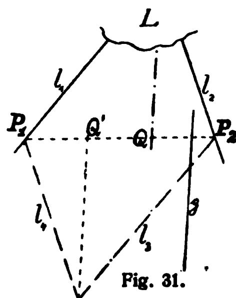


Fig. 31.

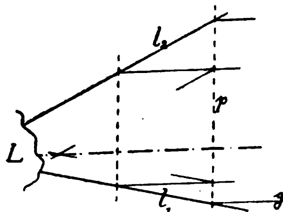


Fig. 32.

e) Man ziehe (Fig. 31) P_1P_2 beliebig, lege durch P_2 die Gerade $l_3 \parallel l_1$, durch P_1 die Gerade $l_4 \parallel l_2$. Durch den Schnitt

von l_3, l_4 lege man zu g die Parallele, welche P_1P_2 in Q' schneidet, mache $P_1Q = P_2Q'$, so ist Q ein Punkt der gesuchten Geraden.

f) Man betrachte (Fig. 32) L als äußeren Ähnlichkeitspunkt für eine Reihe einseitig (nämlich parallel einer beliebigen Richtung p) begrenzter Parallelstreifen und verfahre nach Analogie der Aufgabe 3.d).

g) Man führe die bei Aufgabe 3. unter f) (Fig. 25) angegebene Konstruktion aus für den Fall, daß g_1 und g_2 zueinander parallel (nämlich beide parallel g) sind.

Anmerkung. Auch die Lösungen *d* und *e* der vorliegenden Aufgabe können als Sonderfälle von Lösungen der Aufgabe 3. angesehen werden. Inwiefern?

Durch die Lösungen 1.c), d), 3.c), d), e), 4.b), c), d), f) und g) schimmert eine allgemeinere Methode hindurch, die man wohl als *Veränderung des Maßstabes* bezeichnen kann; man ersetzt die gesuchte Figur zunächst durch eine ihr ähnliche und verändert dann den Maßstab der Zeichnung in geeigneter Weise. Man könnte noch allgemeiner fragen, ob sich etwa *beweisen* lasse, daß man für *alle* ebenen Konstruktionen auf ähnliche Weise einen Ersatz finden kann, falls einige Elemente unerreichbar werden. Einen solchen Nachweis führt z. B. E. Daniele mittelst der Methode der *Inversion* und W. Weber (wie übrigens schon C. Paulus) mittelst der noch allgemeineren Vorschrift, den unzugänglichen Teil durch *irgendein Gesetz* auf den zugänglichen *abzubilden*, um so die Ausführung der Konstruktion zu ermöglichen. — So wertvoll solche Betrachtungen für die theoretische Einsicht sein mögen, so wenig kann der praktische Zeichner mit einer allzu allgemeinen Lösungsvorschrift anfangen; sehr richtig bemerkt z. B. Weber zu seinem eigenen Vorschlage: „Ob die so (allgemein) gewonnene Lösung immer die *einfachste* und vor allen Dingen *genaueste* Bestimmung der gesuchten Elemente liefert, ist eine weitere Frage, die allerdings von nicht geringerer Bedeutung ist." In der Tat ist beim praktischen Zeichnen Einfachheit und Genauigkeit die Seele jeder Konstruktion, und deswegen brauchen wir uns auf andere, mehr theoretische Fragen in dem vorliegenden Büchelchen nicht einzulassen, wir können uns vielmehr damit begnügen, einmal kurz darauf hingewiesen zu haben,

daß der rein praktische Gesichtspunkt nicht der einzige ist, von dem aus man die Konstruktionen in begrenzter Ebene ansehen kann und angesehen hat.

Wir schlagen jetzt dem Leser zwei Aufgaben zu eigener Bearbeitung vor:

5. Durch zwei Paare unzugänglicher Punkte sind zwei ferne Geraden gegeben (Fig. 33); ihr Schnittpunkt S soll durch zwei auf dem Zeichenblatte verlaufende Geraden genauer bestimmt werden.

Andeutung: Man betrachte S als Perspektivitätszentrum von Dreieckspaaren und wende auf diese mehrmals den Desarguesschen Satz an (so bei Giacomini).

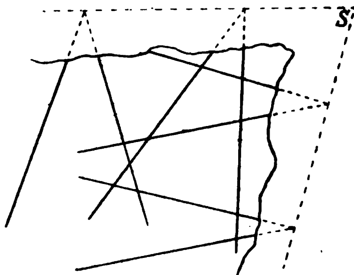


Fig. 33.

6. In dem unzugänglichen Schnittpunkt C zweier Geraden a und b soll auf einer von ihnen das Lot errichtet werden.

Andeutung: Entweder unter Benutzung von Aufgabe 4. oder (wie bei G. Loria) mittels des Satzes, daß die drei Höhen eines Dreiecks sich in einem Punkte schneiden.

Um an einem Beispiel zu zeigen, daß man auch ziemlich komplizierte Aufgaben auf verhältnismäßig einfache Weise erledigen kann, führen wir hier noch eine Lösung einer von R. Mohr im Jahre 1908 (Math.-Nat. Bl. Jahrg. 5, S. 141) gestellten und vom Verfasser des vorliegenden Büchleins gelösten Aufgabe an:

7. Gegeben drei Geraden a, b, c und ein Punkt P; der Schnittpunkt C von a, b ist unzugänglich. In C denke man sich auf b das Lot errichtet, das c in dem ebenfalls unzugänglichen Punkte V schneiden möge. Man soll durch P nach V eine Gerade legen. (Die Herstellung der Figur wird dem Leser überlassen.)

Die Schnittpunkte, die a, b auf c bestimmen, seien B, A; E sei die Mitte von AB. Durch E ziehe man $\parallel a$ eine Gerade, die b in F schneidet, so ist F die Mitte von AC. Durch F lege man $\perp b$ eine Gerade, die c in M schneidet, und ziehe

$MU \perp c$. Zu P bestimme man in bezug auf MU den symmetrischen Gegenpunkt P_1 und ziehe P_1A. Der Punkt, den P_1A auf MU ausschneidet, sei S. PS ist dann die gesuchte Gerade, die durch V geht. — *Beweis:* M ist Mittelpunkt des Kreises, der durch A, C, V geht (mehrmalige Anwendung des Strahlensatzes).

Anmerkung: Wenn S nahe an P liegt, so tut das der Genauigkeit, mit der PV bestimmt ist, doch keinen Abbruch, da es nur auf die *symmetrische Lage* der *Geraden* P_1S und PS ankommt. Man würde in diesem Falle etwa auf P_1A so nahe wie möglich an A einen Punkt annehmen und sein Spiegelbild in bezug auf MU konstruieren. Natürlich muß der Punkt auf P_1A so gewählt werden, daß sein Spiegelbild noch zugänglich ist.

Eine ähnliche Lösung gibt W. Weber. Es versteht sich von selbst, daß man die Aufgabe auch noch auf manche andere Art lösen kann, indem man z. B. zunächst nach Aufgabe 6. und dann nach Aufgabe 1. verfährt (so z. B. W. Gaedecke), doch ist das nicht einfacher als die hier angegebene Lösung, deren Wert in ihren Genauigkeitsproben beruht.

8. Von dem unzugänglichen Schnittpunkte A zweier Geraden b, c ist auf eine dritte Gerade a das Lot zu fällen.

1. Fall. Die Schnittpunkte von a mit b, c sind zugänglich. Die Gerade a schneide (Fig. 34) b, c in C, B; ich fälle von B, C auf b, c die Lote h', h'', die sich in H schneiden. Das von H auf a gefällte Lot geht durch A, ist also das verlangte. (*Beweis:* H ist der Schnittpunkt der drei Höhen des Dreiecks ABC.)

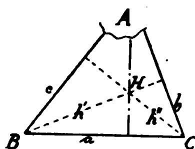


Fig. 34.

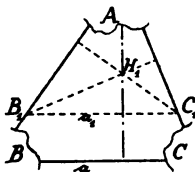


Fig. 35.

2. Fall. Die Schnittpunkte von a mit b, c sind unzugänglich. Ich ziehe (Fig. 35) die Gerade $a_1 \parallel a$ und verfahre mit a_1, b, c wie beim 1. Fall. Vgl. Aufgabe 14.c).

II. HALBIERUNG EINES WINKELS MIT UNZUGÄNGLICHEM SCHEITEL

9. Einen Winkel, dessen Scheitel unzugänglich ist, zu halbieren.

a) Ich betrachte die gesuchte Halbierungslinie als geometrischen Ort der Punkte, die von den Schenkeln u, v (Fig. 36) gleichweit entfernt sind. Bleibt die Konstruktion genau, wenn (u, v) ein sehr kleiner Winkel ist? (Nr. 3 der Wienerschen Sätze.)

b) Man zeichne (Fig. 37) $AB \perp v$, ebenso $BC \perp u$; die Halbierungslinie BB' des Winkels ABC steht auf der gesuchten Halbierungslinie senkrecht. (*Beweis!*) Man braucht

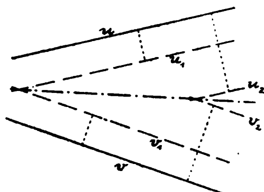


Fig. 36.

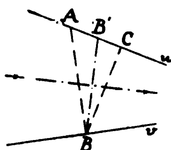


Fig. 37.

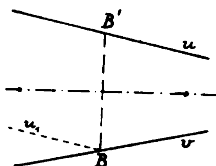


Fig. 38.

also nur zu BB' das Mittellot zu konstruieren. — *Genauigkeitsprobe:* Zu BB' eine (oder zwei) Parallele ziehen und die Endpunkte mit B, B' (oder unter sich) kreuzweise verbinden!

c) Durch einen auf v (Fig. 38) beliebig gewählten Punkt B ziehe man $u_1 \| u$. Zur Halbierungslinie BB' des (stumpfen) Winkels (v, u_1) konstruiere man das Mittellot.

d) Eine sehr hübsche, zuerst von Witting [10] angegebene Konstruktion ist besonders bei sehr kleinem Winkel (u, v) empfehlenswert. Man schneide u, v (Fig. 39) durch zwei beliebige Parallelen MN und PQ, mache $MP = MP' = MP''$ und $NQ = NQ' = NQ''$. Der Schnitt von PP' und QQ' sei R, der von $P'P''$ und $Q'Q''$ sei T; die Gerade RT ist die gesuchte

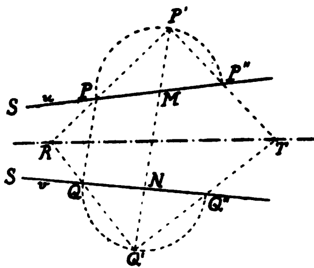


Fig. 39.

Halbierungslinie. Der *Beweis* folgt aus dem Satze, daß die Halbierungslinien zweier Dreieckswinkel (im $\Delta\ PSQ$) oder Außenwinkel (im $\Delta\ P''SQ''$) sich auf der Halbierungslinie des dritten Dreieckswinkels schneiden. — Warum wird man den soeben genannten Satz nicht allein auf das Dreieck PQS anwenden, also nur in P und Q die Dreieckswinkel und Außenwinkel halbieren, was theoretisch doch einfacher wäre? (Achte auf die Lage der Punkte R und T).

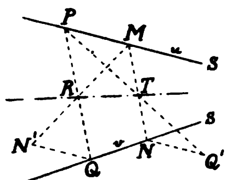


Fig. 40.

e) Eine andere, ebenfalls von Witting herrührende Konstruktion macht von dem Satze Gebrauch, daß die Halbierungslinie eines Dreieckswinkels die Gegenseite (PQ oder MN in Fig. 40) im Verhältnis der beiden anliegenden teilt. Die beiden Parallelen MN, PQ bedingen die Proportion

$$SP : SQ = SM : SN = PM : QN;$$

man braucht also nur PQ und MN im Verhältnis $PM : QN$ zu teilen, etwa so: $QN' \parallel NQ' \parallel u$, $QN' = NQ' = QN$. MN' schneidet PQ in R, PQ' schneidet MN in T; RT ist die gesuchte Halbierungslinie.

f) Ziehe ich zu jedem der Schenkel eine beliebige Parallele (Fig. 41), so entsteht ein Parallelogramm $SPS'Q$; in diesem halbiere ich den Winkel S'; die Halbierungslinie bestimmt auf der Diagonale PQ einen Punkt T. Ich messe $QT' = PT$ ab[1]) und ziehe durch den so erhaltenen Punkt T' die Parallele zu $S'T$ (Redl). Wenn der Winkel bei S sehr klein ist, empfiehlt sich die folgende Konstruktion.

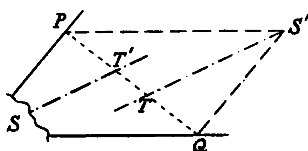


Fig. 41.

g) Man ziehe wieder zu beiden Schenkeln je eine beliebige Parallele und messe (Fig. 42) $PP' = QQ'$ und $PP'' = QQ''$ ab. (Um möglichst mit derselben Zirkelöffnung zu arbeiten, macht man auch $PP' = PP''$, doch ist das theoretisch nicht nötig.) Die Geradenpaare PQ', $P'Q$ und $P''Q$, PQ'' schnei-

1) Warum (bei den in Fig. 41 herrschenden Lageverhältnissen) nicht $PT' = QT$, was theoretisch doch dasselbe wäre?

den sich in den Punkten R' und R'', die auf der gesuchten Halbierungslinie liegen. Der *Beweis* kann ebenso wie bei f) dem Leser überlassen bleiben; es sei nur angedeutet, daß der (in der Fig. 42 nicht gezeichnete) Schnittpunkt des Geradenpaares $P'Q''$, $P''Q'$ ebenfalls auf der gesuchten Halbierungslinie liegt; diese selbst ist die Pascalsche Gerade für das Sechseck $PQ'P''QP'Q''$ (Redl).

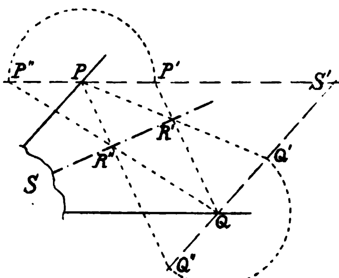


Fig. 42.

Anmerkung. Betrachtet man $PS'Q$ als den zu halbierenden Winkel, so hat man mit der Konstruktion $PP' = PP'' = QQ' = QQ''$ sogleich ein Mittel zur Lösung der Aufgabe: die *Richtung* der Halbierungslinie eines Winkels mit unzugänglichem Scheitel (S' ist ja unbenutzt geblieben) zu ermitteln. (So als selbständige Aufgabe bei Redl.) Wenn es nur auf die *Richtung* der Halbierungslinie (oder die dazu senkrechte) ankommt, so ist die Lösung b) im allgemeinen erheblich *genauer* als die soeben angegebene. Warum?

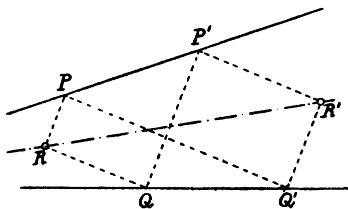


Fig. 43.

h) Man messe auf beiden Schenkeln zwei beliebige, aber gleiche Strecken $PP' = QQ'$ ab (Fig. 43), ziehe durch P und Q' Parallele zu $P'Q$, ebenso durch P' und Q Parallele zu PQ'. Die so bestimmten Punkte R und R' liegen auf der gesuchten Halbierungslinie (Redl). *Beweis* durch zweimalige Anwendung der Umkehrung des bei e) angeführten Satzes. — Man untersuche die *Genauigkeit* der Konstruktion.

III. KONSTRUKTIONEN AN DREIECKEN UND VIELECKEN MIT UNZUGÄNGLICHEN ECKPUNKTEN.

10. Ein Vieleck, von welchem eine Ecke unzugänglich ist, so zu verwandeln, daß die unzugängliche Ecke fortfällt.

Man verbinde die der unzugänglichen Ecke X zunächst gelegenen Ecken A, B und lege nach der vorigen Aufgabe eine Parallele zu AB durch X.

Anmerkung. Die Aufgaben über Verwandlung von Parallelogrammen und Dreiecken (z. B. ein Parallelogramm in ein anderes mit vorgeschriebener Grundlinie zu verwandeln) lassen sich, wenn eine Ecke unzugänglich werden sollte, meist mit noch einfacheren Hilfsmitteln lösen, worauf hier aber nicht eingegangen werden soll.

11. Eine Dreiecksseite BC zu halbieren, wenn die beiden begrenzenden Ecken unzugänglich sind.

1. Fall. Die dritte Ecke A ist zugänglich. Man zeichne (Fig. 44) zu BC eine Parallele B_1C_1 und verbinde deren Mitte D_1 mit A; die Verbindungslinie AD_1 halbiert BC in D. (AD ist Schwerpunktstransversale von ABC und AB_1C_1.) — *Muß* man B_1C_1 *halbieren,* um AD zu erhalten? (Ziehe noch $B_2C_2 \parallel B_1C_1$; die Verbindungslinien B_1C_2, B_2C_1 schneiden sich auf AD.)

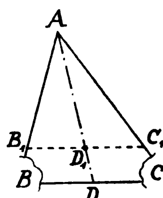


Fig. 44.

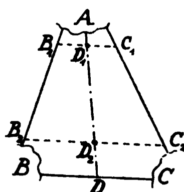


Fig. 45.

2. Fall. Die dritte Ecke A ist unzugänglich. Man ziehe (Fig. 45) zu BC zwei Parallele B_1C_1 und B_2C_2 und verbinde deren Mitten D_1 und D_2. Natürlich kann man auch hier, statt B_1C_1 und B_2C_2 wirklich mit dem Zirkel zu halbieren, noch eine dritte Parallele B_3C_3 ziehen und die Punkte $B_1, \cdots C_3$ passend „kreuzweise" verbinden, dann schneiden sich z. B. B_1C_3 und B_3C_1 auf AD, ebenso B_1C_2 und B_2C_1, ebenso (zur Probe) B_2C_3 und B_3C_2. — Wovon wird (abgesehen von den Daten der Aufgabe) die *Genauigkeit* dieser Konstruktion abhängen?

12. Den eingeschriebenen Kreis eines Dreiecks zu zeichnen, wenn die Ecken unzugänglich sind.

Man halbiere nach einer der bei Nr. 9. besprochenen Methoden zwei Winkel des Dreiecks und verfahre dann wie gewöhnlich. Die *Genauigkeitsprobe* ist sehr bequem.

13. Den umgeschriebenen Kreis eines Dreiecks zu ermitteln, dessen Ecken unzugänglich sind.

Die Aufgabe hat den Sinn, daß man den Mittelpunkt und den Radius des Kreises angeben soll.

Ein praktischer Fall (mit Anwendung von Aufgabe 3.) wäre etwa folgender: Auf einer Landkarte sind drei Orte *A*, *B*, *C* nicht mehr enthalten, aber durch je zwei geradlinige Chausseen bestimmt. Der von den drei Orten gleichweit entfernte Punkt *M* und die Entfernung (*MA*) ist zeichnerisch zu ermitteln.

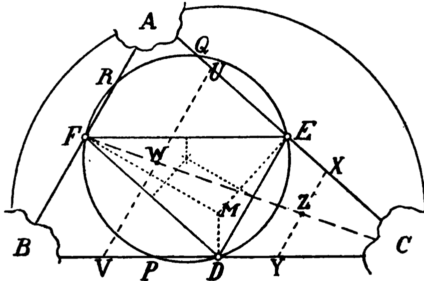


Fig. 46.

Ich ziehe (Fig. 46) zu einer Dreiecksseite, z. B. *AB*, zwei Parallele *XY* und *UV*, ermittele dadurch (nach Aufgabe 11, 2) die Mitte *F* von *AB* und ziehe durch *F* zu *AC*, *BC* die Parallelen *FD*, *FE*. Die in *D*, *E*, *F* auf den Dreiecksseiten errichteten Lote schneiden sich in dem gesuchten Mittelpunkte *M*. Um auch den Radius des gesuchten Kreises zu finden, konstruiere ich zum „Mittendreieck" den umgeschriebenen Kreis und verdoppele dessen Radius. – Die Aufgabe läßt sich in gewisser Weise verknüpfen mit der folgenden:

14. In einem Dreieck mit unzugänglichen Ecken die Höhen zu konstruieren.

a) Ist der Satz vom *Neunpunktekreis* dem Zeichner bekannt, so kann er die Höhenfußpunkte *P*, *Q*, *R* schon aus der vorigen Fig. 46 entnehmen als die Punkte, in denen der Feuerbachsche Kreis (*DEF*) die Seiten des gegebenen Dreiecks *ABC* je zum zweiten Male schneidet. — Den Grad der erreichten Genauigkeit prüft man am besten, indem man in *P*, *Q*, *R* die Lote wirklich errichtet.

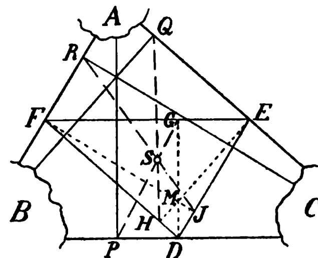


Fig. 47.

b) Man kann auch die (Fig. 46) schon gezeichneten Mittelsenkrechten *MD*, *ME*, *MF* auffassen als

Höhen DG, EH, FJ des Mittendreiecks. (Der Deutlichkeit wegen ist Fig. 47 neu entworfen.) Der gemeinsame Schwerpunkt S von ABC und DEF ist in Fig. 46 auch schon bekannt (etwa durch CF und die Verbindungslinie von D mit der Mitte von EF). Man braucht also nur G, H, J mit S zu verbinden, um P, Q, R zu erhalten. *Beweis:* Der gemeinsame Schwerpunkt S ist innerer Ähnlichkeitspunkt der Dreiecke ABC und DEF.

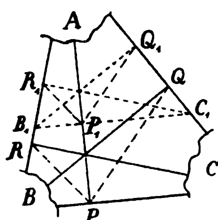


Fig. 48.

c) Wenn von dem Dreieck nur die Höhen gesucht werden, Fig. 46 also noch nicht gezeichnet vorliegt, so ist es natürlich am einfachsten, auf eine der Ecken, z. B. A, die Aufgabe 8. 2. Fall anzuwenden und dann durch P (Fig. 48) zu P_1Q_1, P_1R_1 die Parallelen PQ, PR zu ziehen. – Man versäume nicht, eine Genauigkeitsprobe zu machen.

IV. AUFGABEN AUS DER KREISLEHRE

15. Eine Gerade schneidet einen Kreis so, daß der eine der beiden Schnittpunkte unzugänglich wird; dieser soll durch den Schnitt zweier Geraden ersetzt werden.

a) Die gegebene Gerade g schneide (Fig. 49) den Kreis außer in dem unzugänglichen Punkte S noch in G. Man ziehe $GD \perp g$; der Durchmesser DM geht durch S (Satz des Thales). Wenn der diametrale Gegenpunkt von S nicht mehr benutzbar ist, aber G noch auf dem Zeichenblatte liegt, so kann man

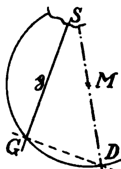


Fig. 49.

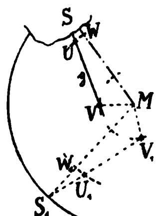


Fig. 50.

b) $MX \perp g$ ziehen und den Winkel XMG um MX umklappen.

c) Ist M zugänglich, G aber nicht, so wähle man auf g zwei Punkte U, V (Fig. 50), drehe die Strecke UV um M in eine neue Lage (indem man in bekannter Weise U, V auf konzentrischen Kreisen laufen läßt). Der von U_1V_1 auf dem

gegebenen Kreise bestimmte Punkt S_1 entspricht dem Punkte S; man braucht also nur das Dreieck $M V_1 S_1$ zurückzudrehen, um die Richtung MS zu erhalten. – Wie wird man das „Zurückdrehen" am zweckmäßigsten ausführen? Wird man $UW = U_1 W_1$ abmessen, oder lieber $W_1 W = U_1 U$?

d) Ist der Mittelpunkt M nicht benutzbar, wohl aber, wie in b), der Punkt G, so kann man (Fig. 51) zu g eine beliebige parallele Sehne AB ziehen, auf ihrem Mittellot (welches zugleich das von GS ist) einen Punkt X wählen und den Winkel MXG um MX umklappen.

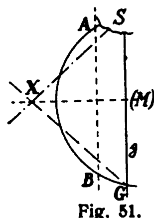


Fig. 51.

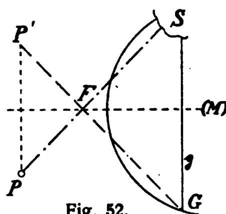


Fig. 52.

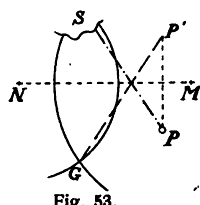


Fig. 53.

16. Einen Punkt P mit dem unzugänglichen Schnittpunkt einer Geraden und eines Kreises geradlinig zu verbinden.

Man zeichne direkt (wenn M zugänglich ist) oder mit Hilfe einer Parallelen zu g (wie Fig. 51) die Mittelsenkrechte von SG (Fig. 52) und bestimme in bezug auf dieses Mittellot den symmetrischen Gegenpunkt P' von P. Die Verbindungslinie $P'G$ schneide das Mittellot von SG in F. PF ist die verlangte Verbindungslinie. – Wie wird man verfahren, wenn PS nahezu parallel FM wird? Welche Genauigkeitsprobe steht zur Verfügung? – Daß man die Aufgabe auch mit Hilfe von Nr. 15. und 1. lösen kann, ist selbstverständlich; doch wird diese Konstruktion wohl nur selten der soeben angegebenen vorzuziehen sein.

17. Einen Punkt P mit dem unzugänglichen Schnittpunkt zweier Kreise geradlinig zu verbinden.

Ich ziehe (Fig. 53) die gemeinschaftliche Zentrale MN beider Kreise, spiegele (wie in Nr. 16) den Punkt P an MN, verbinde den Gegenpunkt P' mit dem zugänglichen Schnittpunkt G der Kreise und ziehe PS symmetrisch zu $P'G$.

18. Die gemeinschaftliche Sehne zweier Kreise K, K' zu zeichnen, deren Schnittpunkte unzugänglich sind.

Ich betrachte die gemeinschaftliche Sehne als Potenzlinie von K und K', schneide beide Kreise durch zwei Hilfskreise C_1 und C_2 (Fig. 54) und benutze den Satz, daß *die Chordalen dreier Kreise sich in einem Punkte schneiden*, zweimal, nämlich bei K, K', C_1 und bei K, K', C_2. Die beiden unzugänglichen Chordalpunkte verbinde ich nach Aufg. 3. Sind die Mittelpunkte der Kreise zugänglich, so ist es im allgemeinen einfacher und genauer, die Aufgabe auf Nr. 8. zurückzuführen. (Die Chordale schneidet die Zentrale rechtwinklig.)

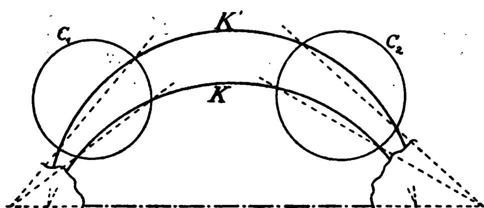


Fig. 54.

19. An einen Kreis, dessen Mittelpunkt unzugänglich ist, soll in einem gegebenen Punkte die Tangente gelegt werden.

(Nach Schlotke.) Man trage (Fig. 55) von dem gegebenen Punkte P aus zwei beliebige, aber gleiche Strecken $PA = PB$ als Sehnen in den Kreis ein und ziehe durch P die Gerade $p \parallel AB$; p ist die gesuchte Tangente. (*Beweis!*)

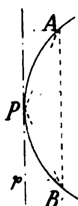


Fig. 55.

20. Einen Kreis zu zeichnen, der eine gegebene Gerade (oder einen gegebenen Kreis) in einem gegebenen Punkte berührt und durch den unzugänglichen Schnittpunkt zweier Geraden geht.

Es sei P (Fig. 56) der gegebene Punkt auf der gegebenen Tangente PT. [Wenn statt dieser ein *Kreis* gegeben ist, so läßt sich PT (wenn nicht anders, dann nach Nr. 19.) finden.]

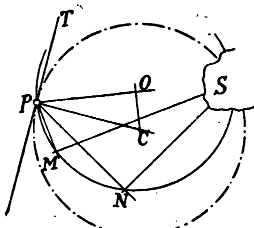


Fig. 56.

Ich fälle von P auf die gegebenen Geraden die Lote PM, PN und konstruiere den Mittelpunkt O des Kreises (PMN). Da PMS, PNS rechte Winkel sind, so geht PO durch S, also ist die in O auf PO

errichtete Senkrechte *OC* ein Ort für den Mittelpunkt des gesuchten Kreises. Ein zweiter Ort ist die Gerade $PC \perp PT$.

21. Von einem Kreise kennt man einen Punkt *P* und den unzugänglichen Mittelpunkt *M*, der durch die beiden Geraden g' und g'' bestimmt ist. Man ermittele die Schnittpunkte des Kreises mit g' und g''. (Ohne Figur.)

Die symmetrischen Gegenpunkte von *P* in bezug auf g' und g'' seien P' und P''. Man halbiere die Strecke $P'P''$ und ziehe zu g' und g'' Parallelen im Abstande $\frac{1}{2}\overline{P'P''}$. Diese Parallelen bestimmen auf g'' und g' die gesuchten Kreispunkte (Redl). Der *Beweis* ist sehr leicht durch Kongruenzbetrachtungen zu führen. — Die Konstruktion ist ausführbar ohne Rücksicht darauf, ob *P* innerhalb oder außerhalb des von g', g'' gebildeten spitzen Winkels liegt; sie liefert auch leicht eine neue Lösung der Aufgabe, *P* mit *M* zu verbinden (Aufg. 1) und auch in *P* an den nicht konstruierbaren Kreis die Tangente zu legen.

22. Von einem Kreise mit unzugänglichem Mittelpunkt sind drei Punkte P_1, P_2, P_3 gegeben; man soll die Tangenten in ihnen konstruieren.

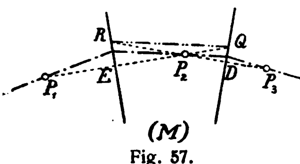


Fig. 57.

Man zeichne (Fig. 57) die Mittellote *DM*, *EM* auf P_2P_3, P_1P_2, verlängere die Strecken P_1P_2, P_2P_3, bis sie *DM*, *EM* in *Q*, *R* schneiden. *QR* ist der gesuchten Tangente in P_2 parallel. *Beweis*: *QE*, *RD* sind (nach Konstruktion) Höhen des Dreiecks *MQR*; also steht P_2M auf *QR* senkrecht. P_2M ist aber ein Radius, demnach *QR* die Richtung der Tangente. — Der Leser bemerkt sogleich, daß die Aufgabe, durch P_1, P_2, P_3 die Radien des Kreises zu zeichnen, durch unsere Konstruktion ohne weiteres mitgelöst ist. (Man beachte die Beziehung zu Aufg. 1.g).

23. Ein Kreis *K* mit unzugänglichem Mittelpunkt ist durch drei Punkte P_1, P_2, P_3 gegeben, ein anderer K' vollständig gezeichnet. Die Chordale von *K*, K' ist zu konstruieren.

Man lege (Fig. 58) durch die Punkte P_2, P_3 einen Hilfskreis C_1, welcher K' schneidet. Der Chordalpunkt von *K*, K', C_1 sei *F*; ebenso lege man durch P_1, P_2 einen Hilfskreis

C_2, welcher K' schneidet. Das Potenzzentrum von K, K', C_2 sei G. FG ist die gesuchte Chordale von K, K' (vgl. Aufgabe 18).

24. **An einen Kreis von dem unzugänglichen Schnittpunkt S zweier Geraden die Tangenten zu legen.**

a) Man kann noch vorschreiben, daß zur Lösung *nur das Lineal* benutzt werde. Man legt in diesem Falle (nach 1.a)) durch S zwei beliebige Sekanten AB, CD (Fig. 59) und zieht die Geradenpaare AC, BD und AD, BC; der Schnittpunkt des ersten Paares sei E, der des zweiten F. Die Verbindungslinie der Punkte E, F schneidet den Kreis in den Berührungspunkten der gesuchten Tangenten. Der *Beweis* beruht auf dem aus der Lehre von den Kreispolaren bekannten Satze, daß EF die Polare von S in bezug auf den Kreis ist. — Die Konstruktion gilt, wie durch Zentralprojektion sofort hervorgeht, ohne weiteres auch für Kegelschnitte. Der zum Beweise dienende Satz lautet dort: Die drei Paar Gegenseiten eines vollständigen Vierecks, das einer Kurve zweiter Ordnung eingeschrieben ist, schneiden sich in den Eckpunkten eines Poldreiecks der Kurve. — Die Konstruktion ist praktisch nur empfehlenswert, wenn die beiden gegebenen Geraden schon Sekanten des Kreises (oder Kegelschnittes) sind; die oben angedeutete Ausführung von Aufgabe 1.a) ist umständlich und nur selten genau genug.

Fig. 58.

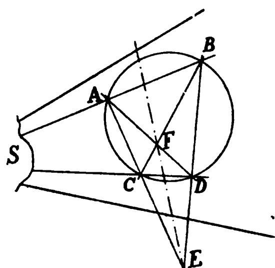


Fig. 59.

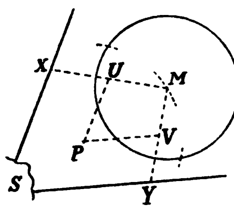


Fig. 60.

b) Ich ziehe von dem Mittelpunkte M des Kreises nach den beiden gegebenen Geraden passend gewählte, sonst beliebige Strecken MX, MY (Fig. 60), halbiere MX in U, MY in V, ziehe durch U zu SX durch V zu SY die Parallele. Die beiden erhaltenen Geraden schneiden sich in dem Mittelpunkt P von MS. (Hierin steckt eine Lösung der Aufgabe 1. Welche?) Der Kreis um P mit PM als Radius schneidet bekanntlich aus dem gegebenen Kreise die Berührungspunkte aus. — Die Konstruktion wird unsicher, wenn der Winkel XSY klein ist; sie versagt, wenn P nicht mehr auf der Zeichenfläche liegt.

c) Fällt man vom Mittelpunkte M des gegebenen Kreises K (Fig. 61) auf die gegebenen Geraden die Lote MA, MB, so sind die Berührungspunkte der Tangenten als diejenigen Punkte bestimmbar, in denen der Kreis (AMB) den Kreis K schneidet. Man hat also nur (nach Aufg. 23) durch A, M und B, M zwei Hilfskreise C_1 und C_2 zu legen und die Chordalpunkte F und G zu verbinden. — Kommt eine der gegebenen Geraden, z. B. SA, dem Mittelpunkt M sehr nahe, so ist die soeben angegebene Konstruktion immer noch brauchbar. Man bestimme (Fig. 62) den Chordalpunkt G wie vorher, außerdem aber auch die Punkte C, D, in denen die Lote MA, MB die Geraden BS, AS schneiden, und beachte, daß MS als dritte Höhe des Dreiecks CDS auf CD senkrecht steht. MS ist aber gemeinschaftliche Zentrale der Kreise K und (MAB). Auf dieser Zentrale steht wieder die gesuchte, durch G gehende Chordale von K und (MAB) senkrecht. Man hat also nur durch G die Parallele zu CD zu legen.

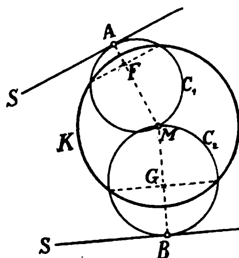


Fig. 61.

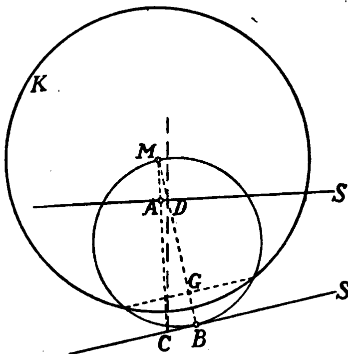


Fig. 62.

Einem interessanten Sonderfall der vorliegenden Aufgabe begegnet man bei der Behandlung

des Apollonischen Taktionsproblems. Eine der zehn speziellen, hierzu gehörigen Aufgaben ist die, *Kreise zu finden, die durch zwei gegebene Punkte P_1, P_2 gehen und einen gegebenen Kreis K berühren.* Diese Aufgabe löst man bekanntlich, indem man durch P_1, P_2 einen Kreis legt, der K in A, B schneidet. Von dem Punkte S aus, in welchem sich $P_1 P_2$ und AB schneiden, legt man die Tangenten an den Kreis K und erhält dadurch die Berührungspunkte der beiden gesuchten Kreise. – Liegen *die Punkte P_1, P_2 nahezu auf einem mit K konzentrischen Kreise,* so ist die angegebene Lösung unbrauchbar. Man lege in diesem Falle durch P_1, P_2 noch einen Kreis, der K in C, D schneidet; die Sekante CD geht durch S, man braucht also, um die Polare von S in bezug auf K (und damit die gesuchten Berührungspunkte) zu ermitteln, nur nach Fig. 42 zu verfahren. Die *Genauigkeitsprobe* ist sehr bequem.

25. Von zwei Kreisen, deren Mittelpunkte P, Q unzugänglich sind, kennt man je drei Punkte P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3; die Chordale der beiden Kreise ist zu zeichnen.

a) Man wähle einen passend gelegenen Hilfskreis C_1 und bestimme (nach Aufg. 23.) die Chordale der Kreise C_1 und $(P_1 P_2 P_3)$, ebenso die Chordale der Kreise C_1 und $(Q_1 Q_2 Q_3)$; der Chordalpunkt der Kreise C_1, $(P_1 P_2 P_3)$, $(Q_1 Q_2 Q_3)$ sei F. Die Konstruktion wiederhole man bei einem zweiten Hilfskreise C_2; der Chordalpunkt sei G. FG ist die gesuchte Gerade. – Meist wird es zweckmäßiger sein, den Hilfskreisen eine spezielle Lage zu geben und etwa folgendermaßen zu verfahren:

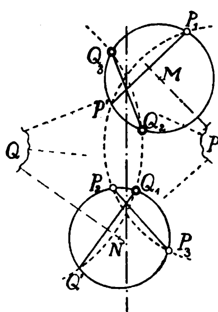


Fig. 63.

b) Die unzugänglichen Mittelpunkte P, Q seien durch die (in Fig. 63 nur angedeuteten) Mittellote auf $P_1 P_2$, $P_2 P_3$, $Q_1 Q_2$, $Q_2 Q_3$ bestimmt. Man wähle drei nicht zu einem der gegebenen Tripel gehörige Punkte, z. B. P_1, Q_2, Q_3 und verbinde[1]) den Mittelpunkt M des durch diese drei Punkte

1) In Fig. 63 ist die Verbindungslinie MP (ebenso NQ) nur gezogen, um dem Beschauer der Figur deutlicher zu machen, daß

gehenden Kreises mit P. Die von P_1 auf MP gefällte Senkrechte ($P_1 P'$) schneidet $Q_1 Q_2$ in einem Punkte der gesuchten Chordale, nämlich in dem Chordalpunkt der drei Kreise um P, M, Q. Führt man dieselbe Konstruktion bei den drei anderen Punkten Q_1, P_2, P_3 aus, so ist die Aufgabe gelöst.

Anmerkung. Liegen die Punkte $P_1, \ldots Q_3$ von vornherein ungünstig, so kann man sie durch andere ersetzen; z. B. könnte man im zweiten Teil der Konstruktion statt des Punktes Q_1 auch den symmetrischen Gegenpunkt von Q_3 in bezug auf das Mittellot von $Q_1 Q_2$ wählen.

26. Die Endpunkte P und Q einer fernen Strecke sind durch die Geradenpaare a, b und c, d gegeben. Die Richtung der Strecke PQ (oder auch die dazu senkrechte) zu bestimmen.

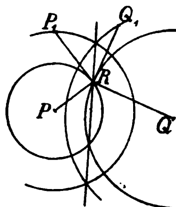


Fig. 64.

Die Auflösung beruht auf dem Gedanken, daß man P und Q als die Mittelpunkte zweier Kreise ansieht und deren Chordale konstruiert, die ja auf der Zentrale PQ senkrecht steht.

Vorbemerkung. Es seien (Fig. 64) zwei Kreise um P und Q gezeichnet, in dem einen ihrer Schnittpunkte (R) die Tangenten konstruiert und auf ihnen von R aus beliebige, aber gleiche Strecken RP_1, RQ_1 abgemessen. Zeichnet man einen Kreis um P durch P_1, um Q durch Q_1, so haben diese beiden Kreise dieselbe Chordale wie die beiden ersten. (*Beweis* folgt aus der Definition der Chordale und aus einem bekannten Satze über konzentrische Kreise.) — Hier kommt besonders in Betracht, daß die Chordale der neuen Kreise durch R geht.

Man errichte (Fig. 65) auf den Geraden b und c in ihrem Schnittpunkt R die Lote, messe auf diesen $RP_1 = RQ_1$ ab und bestimme zu P_1 in bezug auf a und b die Gegenpunkte

---

$PP' \perp PM$ ist. Daß man bei der praktischen Ausführung der Konstruktion nicht MP wirklich zeichnet, ist selbstverständlich; man braucht ja nicht MP, sondern nur die Senkrechte zu MP durch P_1. Diese Senkrechte wird man nach Analogie von Aufg. 1.g) ermitteln; die dort mit l_1, l_2 bezeichneten Geraden sind hier die zur Bestimmung von P dienenden Mittellote, dem dort gegebenen Punkt P entspricht hier M, die dort mit $G_1 F_2$ bezeichnete Gerade gibt hier die Richtung von $P_1 P'$ an.

P_2 und P_3, ebenso zu Q_1 in bezug auf d und c die Gegenpunkte Q_2 und Q_3. Die Chordale der Kreise $(P_1 P_2 P_3)$, $(Q_1 Q_2 Q_3)$ ist die gesuchte; da sie (nach der Vorbemerkung) durch R

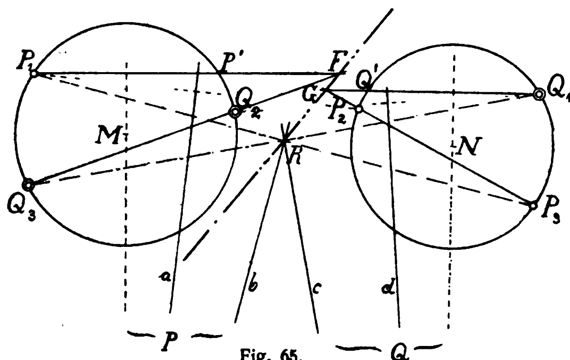


Fig. 65.

geht, so hat man nur noch einen Punkt F der Chordale (wie in Aufg. 25) des Kreises $(P_1 Q_2 Q_3)$ zu konstruieren. Als *Genauigkeitsprobe* kann die Ermittelung eines zweiten Punktes (G) der Chordale dienen.

Da man über die Länge von $RP_1 = RQ_1$ beliebig verfügen kann, so ist man in der Lage, die Punkte $P_1, \ldots Q_3$ so günstig wie möglich zu wählen.

Man beachte die Beziehungen dieser Aufgabe zu Nr. 2. (Schlußbemerkung) und Nr. 3.

Hiermit wollen wir die Konstruktionen in begrenzter Ebene abschließen. Andere als die hier behandelten Aufgaben findet der Leser z. B. in den unter [10] und [11] des folgenden Kapitels genannten Arbeiten; viele neue Aufgaben mit neuen Schwierigkeiten werden sich dem Leser von selbst dargeboten haben, wenn er die in den vorigen Kapiteln angegebenen Konstruktionen wirklich ausgeführt hat.

Eine kurze Schlußbemerkung sei noch gestattet, die dem Leser, falls er es nicht schon selbst gemerkt haben sollte, zeigen mag, welche Fäden sich von dem hier behandelten Gebiete zu benachbarten spinnen. – Wenn man auf einem großen Zeichenblatte zwei Punkte verbinden soll und dazu

kein hinreichend langes Lineal zur Verfügung hat, so ist die zu überwindende Schwierigkeit genau die gleiche, wie wenn das Lineal lang genug, aber der eine der beiden Punkte unzugänglich wäre. Man erkennt schon an diesem einen Beispiel, daß die *Konstruktionen in begrenzter Ebene* und die *Konstruktionen mit beschränkten Hilfsmitteln* aufs engste zusammenhängen. Wir können es dem Leser überlassen, über solche Konstruktionen mit beschränkten Hilfsmitteln weiter nachzudenken, z. B. festzustellen, wie man sich helfen kann, wenn der zur Verfügung stehende Zirkel zu klein ist. Solche Überlegungen werden den Leser in kurzer Zeit überzeugen, daß die Festsetzungen über die Wahl der Hilfsmittel nicht nur von Bedeutung sind für die praktische Lösung der gerade vorgelegten, speziellen Aufgabe, sondern auch für die theoretische Einsicht in den Wirkungsbereich der Zeicheninstrumente. Dem praktischen Zeichner wird es in der Regel ganz gleichgültig sein, wie er etwa einen Winkel mit unzugänglichem Scheitel halbiert, wenn er sich nur durch eine Probe überzeugen kann, daß seine Konstruktion hinlänglich genau geraten ist. Für die Theorie der Zeicheninstrumente aber ist es von Wichtigkeit, ob man die vorgelegte Aufgabe etwa mit alleiniger Benutzung des Lineals oder des Bilineals (d. i. ein Lineal mit zwei parallelen Kanten) oder des Winkelscheits lösen kann, oder ob man den Streckenübertrager oder sonst noch ein Instrument dazu nötig hat, damit die Konstruktion nicht bloß *praktisch brauchbar*, sondern auch *theoretisch genau* sei.

Eine eingehende Behandlung dieser Dinge würde hier zu weit führen, es genügt uns, dem Leser gezeigt zu haben, daß die Konstruktionen in begrenzter Ebene nicht bloß für die meist hausbackenen Bedürfnisse der Praxis von Bedeutung sind, sondern auch zu tiefgehenden theoretischen Untersuchungen Veranlassung geben können.

V. EINIGES ÜBER DIE FACHLITERATUR

Eine ausführliche Aufzählung von Fachschriften würde dem Charakter der „Mathematischen Bibliothek“ nicht entsprechen; ich beschränke mich auf folgende Angaben:

Die älteste Schrift, die sich mit Konstruktionen in begrenzter Ebene beschäftigt, ist

[1] Geometria peregrinans (77 Oktavseiten stark), von der weder der Verfasser, noch der Druckort, noch das Jahr der Veröffentlichung genau bekannt ist. (Ich glaube aus mehreren Anzeichen schließen zu dürfen, daß das kleine Buch im Jahre 1649 erschienen ist.) Hierin werden aus der Feldmeßkunst 16 Aufgaben gestellt, bei denen Punkte oder Geraden unzugänglich sind. Diese Aufgaben wurden wieder abgedruckt und ausführlicher behandelt von

[2] F. van Schooten, Exercitationum mathematicarum libri quinque. Lugd. Batav. 1657.

Aus dem 18. Jahrhundert seien erwähnt:

[3] J. H. Lambert, Freye Perspective, oder Anweisung, jeden perspectivischen Aufriß von freyen Stücken und ohne Grundriß zu verfertigen. 2. Aufl. 1774, Bd. 2 [besonders S. 172f.]. – In der 1. Aufl. (1759) steht die vorn (S. 5) angegebene Lösung noch nicht.

[4] L. Mascheroni, Problemi per gli Agrimensori con varie soluzioni, Pavia, 1793.

Aus der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts:

[5] F. J. Servois, Solutions peu connues de différens problèmes de géométrie-pratique, Metz et Paris, An XII (1805).

[6] Ch. J. Brianchon, Applications de la théorie des transversales Paris 1818.

Von neueren Arbeiten sollen hier nur solche angeführt werden, die vorn im Text wiederholt benutzt und genannt worden sind. Über die anderen findet man genauere Literaturangaben in der unten an letzter Stelle [11] genannten Arbeit des Verfassers.

[7] A. Giacomini, Über die Lösung der geometrischen Aufgaben mit dem Lineal und den linealen Instrumenten: Betrachtungen vom Standpunkte der projektiven Geometrie. (Artikel in F. Enriques, Fragen der Elementargeometrie, Bd. II, Leipzig (B. G. Teubner) 1907.)

[8] Chr. Paulus, Ein Beitrag zum geometrischen Zeichnen. Archiv der Math. u. Phys. 1. Reihe Bd. 23, 1854, S. 364–384.

[9] F. Redl, Constructions de planimétrie. Solutions nouvelles de problèmes compliqués par des conditions particulières. L'Enseignement math. t. XII, p. 293–310, 1910. – Außerdem zwei deutsche Abhandlungen in den Period. Blätt. (Wien u. Leipzig) 1908, S. 38 und in der Ztschr. f. math. u. nat. Unt. Bd. 42, 1911, S. 13–16; ferner zwei Briefe vom 8. März 1908 und 28. Oktober 1912 an den Verfasser des vorliegenden Bändchens.

[10] A. Witting, Geometrische Konstruktionen, insbesondere in begrenzter Ebene. Progr. (Nr. 564) Gymn. z. h. Kreuz, Dresden 1899.

[11] P. Zühlke, Ausführung elementargeometrischer Konstruktionen bei ungünstigen Lageverhältnissen. Leipzig (B. G. Teubner) 1906.

VERZEICHNIS DER NAMEN

(Die Zahlen bezeichnen die Seiten)